Taller 4

TEMA INTEGRAL DEFINIDAD –

INTEGRALES DEFINIDAS

Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo

1. *Suponiendo que se conozca* una antiderivada o primitiva f, se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3\,dx$, es posible escribir

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva ya que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) + C\Big]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$

TEOREMA 4.7 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables en $[a, b]$, y

1. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

Taller 4

EJEMPLO 4 Determine $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$ e interprete el resultado en función de áreas.

SOLUCIÓN El teorema fundamental da

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx &= 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2 \\ &= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0 \\ &= -4 + 3\tan^{-1}2\end{aligned}$$

Éste es el valor exacto de la integral. Si desea una aproximación decimal, utilice una calculadora para obtener un valor aproximado de $\tan^{-1}2$. Al hacerlo tiene

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx \approx -0.67855$$

□

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

SOLUCIÓN La integral dada es una forma abreviada de

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\, dx$$

Una antiderivada de $f(x) = 1/x$ es $F(x) = \ln|x|$ y, como $3 \leqslant x \leqslant 6$, puede escribir $F(x) = \ln x$. De tal manera,

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\, dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3$$

$$= \ln\frac{6}{3} = \ln 2$$

□

Taller 4

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN En primer lugar, necesita escribir el integrando en una forma más sencilla, al llevar a cabo la división:

$$\begin{aligned}
\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\, dt &= \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\, dt \\
&= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Bigg]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Bigg]_1^9 \\
&= \left[2 \cdot 9 + \tfrac{2}{3}(9)^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right] - \left(2 \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right) \\
&= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}
\end{aligned}$$

V EJEMPLO 6 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida en metros por segundo).

(a) Encuentre el desplazamiento de la partícula durante el periodo $1 \leqslant t \leqslant 4$.

(b) Halle la distancia recorrida durante este periodo.

SOLUCIÓN

(a) Por la ecuación 2, el desplazamiento es

$$\begin{aligned}
s(4) - s(1) &= \int_1^4 v(t)\, dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\, dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Esto significa que la partícula se desplaza 4.5 m hacia la izquierda.

(b) Advierta que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$ y, por eso, $v(t) \leqslant 0$ en el intervalo $[1, 3]$ y $v(t) \geqslant 0$ en $[3, 4]$. Por esto, a partir de la ecuación 3 la distancia recorrida es

$$\begin{aligned}
\int_1^4 |v(t)|\, dt &= \int_1^3 [-v(t)]\, dt + \int_3^4 v(t)\, dt \\
&= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\, dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\, dt \\
&= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 \\
&= \frac{61}{6} \approx 10.17 \text{ m}
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 8 Cambio de variables

Calcular $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3\, dx$.

Solución Para calcular esta integral, sea $u = x^2 + 1$. Después,

$u = x^2 + 1 \implies du = 2x\, dx.$

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 0$, $u = 0^2 + 1 = 1$.	Cuando $x = 1$, $u = 1^2 + 1 = 2$.

Ahora, es posible sustituir para obtener

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(x^2 + 1)^3\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + 1)^3 (2x)\, dx && \text{Límites de integración para } x. \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\, du && \text{Límites de integración para } u. \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{15}{8}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Cálculo de una integral definida

Evaluar cada integral definida.

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - 3)\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

Solución

$$a)\quad \int_1^2 (x^2 - 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$$

$$b)\quad \int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$$

$$c)\quad \int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$$

EJEMPLO 2 Integral definida de un valor absoluto

Calcular $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1|\,dx$.

Solución Utilizando la figura 4.27 y la definición de valor absoluto, se puede reescribir el integrando como se indica.

$$|2x - 1| = \begin{cases} -(2x - 1), & x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\to x$

A partir de esto, es posible reescribir la integral en dos partes.

$$\begin{aligned} \int_0^2 |2x - 1|\,dx &= \int_0^{1/2} -(2x - 1)\,dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1)\,dx \\ &= \Big[-x^2 + x\Big]_0^{1/2} + \Big[x^2 - x\Big]_{1/2}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (0 + 0) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Evaluación de una integral definida

Evaluar $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx$ utilizando los siguientes valores.

$$\int_1^3 x^2\, dx = \frac{26}{3}, \qquad \int_1^3 x\, dx = 4, \qquad \int_1^3 dx = 2$$

Solución

$$\begin{aligned}
\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx &= \int_1^3 (-x^2)\, dx + \int_1^3 4x\, dx + \int_1^3 (-3)\, dx \\
&= -\int_1^3 x^2\, dx + 4\int_1^3 x\, dx - 3\int_1^3 dx \\
&= -\left(\frac{26}{3}\right) + 4(4) - 3(2) \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Cambio de variables

Calcular $\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$.

Solución Para calcular esta integral, sea $u = x^2 + 1$. Después,

$$u = x^2 + 1 \implies du = 2x\,dx.$$

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 0$, $u = 0^2 + 1 = 1$.	Cuando $x = 1$, $u = 1^2 + 1 = 2$.

Ahora, es posible sustituir para obtener

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^3(2x)\,dx$$

Límites de integración para x.

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du$$

Límites de integración para u.

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{8}.$$

Intentar reescribir la antiderivada o primitiva $\frac{1}{2}(u^4/4)$ en términos de la variable x y calcular la integral definida en los límites originales de integración, como se muestra.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

Notar que se obtiene el mismo resultado.

Taller 4

EJEMPLO 9 **Cambio de variables**

Calcular $A = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx.$

Solución Para calcular esta integral, considerar que $u = \sqrt{2x-1}$. Después, obtener

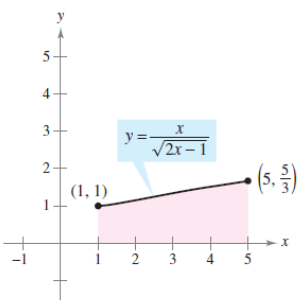
$$u^2 = 2x - 1$$
$$u^2 + 1 = 2x$$
$$\frac{u^2+1}{2} = x$$
$$u\,du = dx. \qquad \text{Diferenciar cada lado.}$$

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 1,\ u = \sqrt{2-1} = 1.$	Cuando $x = 5,\ u = \sqrt{10-1} = 3.$

Ahora, sustituir para obtener

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2+1}{2}\right)u\,du$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1)\,du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} + u\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{2}\left(9 + 3 - \frac{1}{3} - 1\right)$$
$$= \frac{16}{3}.$$



La región antes de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$
Figura 4.38

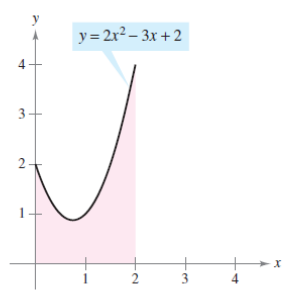
EJERCICIOS 1 halla la solución de

EJEMPLO 3 **Empleo del teorema fundamental para encontrar un área**

Encontrar el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, como se muestra en la figura 4.28.

Solución Notar que $y > 0$ en el intervalo [0, 2].

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\,dx \qquad \text{Integrar entre } x = 0 \text{ y } x = 2.$$
$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 \qquad \text{Encontrar la antiderivada.}$$
$$= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4\right) - (0 - 0 + 0) \qquad \text{Aplicar el teorema fundamental del cálculo.}$$
$$= \frac{10}{3} \qquad \text{Simplificar.}$$



El área de la región acotada por la gráfica de y, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$ es $\frac{10}{3}$
Figura 4.28