Contenido

SEMANA 4 4
ALGEBRA 4
1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS 4
1.1 MONOMIO 4
1.2 POLINOMIO 5
2 PROPIEDADES DE LAS EXPRESIONES ALGEBRICAS 5
3 OPERACIONES CON POLINOMIOS 6
3.1 ADICIÓN. 6
3.2 SUSTRACCIÓN 6
3.3 PRODUCTO DE DOS POLINOMIOS 7
4 PRODUCTOS NOTABLES 8
4.1 PRODUCTO DE DOS BINOMIOS 8
4.2 CUADRADO DE UN BINOMIO $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^2$ 9
4.3 PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA 9
4.4 CUBO DE UN BINOMIO $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^3$ 9
4.5 TRINOMIO CUADRADO $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{c})^2$ 9
4.6 SUMA DE CUBOS $\boldsymbol{a}^3 + \boldsymbol{b}^3$ 10
4.7 DIFERENCIA CUBOS $\boldsymbol{a}^3 - \boldsymbol{b}^3$ 10
SEMANA 5 11
5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS 11
5.1 PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS 11
5.2 PRUEBA DE LA DIVISIÓN 11
5.3 DIVISIÓN LARGA O EUCLIDIANA 12
5.4 DIVISIÓN SINTÉTICA 13
6 FACTORIZACIÓN 16
6.1 FACTOR COMÚN 16
6.2 FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS 16
6.3 TRINOMIO DE LA FORMA $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$ 17
6.4 TRINOMIO DE LA FORMA $\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$ 17
SEMANA 6 17
6.5 TRINOMIO CUADRADO PERFECTO 17
6.6 DIFERENCIA DE CUADRADOS 18
6.7 TRINOMIO CUADRADO PERFECTO POR ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN 18
SEMANA 7 22
7 TEOREMA DEL RESIDUO 22
8 TEOREMA DEL FACTOR 23

9 OPERACIONES RACIONALES CON POLINOMIOS 25

9.1 ADICIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES 25
9.2 SUSTRACCIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES 26
9.3 PRODUCTO DE EXPRESIONES RACIONALES 27
9.4 DIVISIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES 28

10 RACIONALIZACIÓN 29

10.1 RACIONALIZACIÓN DE NUMERADORES. 30
10.2 RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES. 31

SEMANA 8 33

11 ECUACIÓN LINEAL 33

12 ECUACIÓN CUADRÁTICA 34

12.1 DISCRIMINANTE, DEFINICIÓN DE IMAGINARIOS Y OPERACIONES CON COMPLEJOS 39
12.1.1 Discriminante 39
12.1.2 Números Imaginarios 42
12.1.3 Números complejos 43
12.1.4 Operaciones con complejos 44

SEMANA 9 49

12.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 Y 3X3 49
12.3 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES 2X2 49
12.3.1 Método gráfico 51
12.3.2 Por Sustitución 52
12.3.3 Por Igualación 53
12.3.4 Por reducción o eliminación 53
12.3.5 Por Cramer o determinantes 54
12.4 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES 3X3 56
12.4.1 Por Sustitución 57
12.4.2 Por Igualación 59
12.4.3 Por reducción o eliminación 61
12.4.4 Por Cramer o determinantes 62

SEMANA 10 71

13 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES 2X2 CON ECUACIONES CUADRÁTICAS 71

13.1 *CASO 1: UNA ECUACIÓN LINEAL Y OTRA NO LINEAL*. 71
13.2 *CASO 2*: AMBAS ECUACIONES SON NO LINEALES. 72
13.3 *CASO 3*: UNA ECUACIÓN LINEAL Y UNA IRRACIONAL. 73

SEMANA 11 78

14 LOGARITMOS 78

15 ECUACIÓNES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS. 80

SEMANA 12 90

16 INECUACIONES **90**

16.1 INECUACIONES LINEALES 90
16.2 INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO 92
16.3 INECUACIONES RACIONALES 94
16.4 INECUACIONES CUADRÁTICAS 97

BIBLIOGRAFÍA **100**

SEMANA 4

ALGEBRA

El álgebra como complemento de la aritmética, es la rama de las matemáticas que tiene como fin generalizar las operaciones aritméticas mezclando números, letras y signos, es muy útil para resolver problemas de la vida diaria en la cual se encuentran inmersas varias incógnitas. normalmente se utilizan las últimas letras del abecedario (x, y, z, w) para representar variables y las primeras (a, b, c) para representar constantes.

La historia del algebra tuvo sus inicios en el antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de resolver ecuaciones lineales (ax=b) y cuadráticas (ax^2+bx=c).

El precursor del algebra moderno fue el matemático griego Diofanto de Alejandría, quien publicó la obra "Ars magna", en la que se trataron de una forma rigurosa no sólo las ecuaciones de primer grado, sino también las de segundo. Los problemas de álgebra que propuso prepararon el terreno de lo que siglos más tarde sería la teoría de ecuaciones".

En el siguiente video "Los orígenes del algebra", en un recorrido histórico para definir lo que es algebra y su significado, teniendo sus orígenes en la antigua Babilonia 2000 AC, pasando por el año 280 de la era actual en Alejandría, donde aparece el matemático griego Diofanto, posteriormente en el año 580 DC aparece el matemático hindú Brahmagrupta, quien hace grandes contribuciones al algebra y posteriormente aparece Al-Kwarismi, quien sentó las bases de lo que ahora conocemos como álgebra, orientada desde el punto de vista de la abstracción.(Khan, 2013).

1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **variable** es una letra que representa a cualquier número de un conjunto dado de números. Si empezamos con variables *x,y,z* y algunos números reales, y los combinamos usando la resta, multiplicación, división, potencias y raíces obtenemos una **expresión algebraica**.

Ejemplo 1: Expresiones algebraicas

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y-2z}{y^2+4}$$

1.1 Monomio

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k, donde *a,* es el coeficiente y por lo general un número real, la *x* representa la variable y la *k* el exponente de la expresión algebraica. Dicho valor representa el grado del polinomio y la cantidad de términos su nombre.

Expresión	Nombre	Grado
$2x^2$	Monomio	2
$3x+4$	Binomio	1
$2x^2-3x+4$	Trinomio	2
$x^4-2x^3+4x^2-3x+1$	Polinomio	4

1.2 Polinomio

Un polinomio de grado *n* en la variable *x* es cualquier expresión algebraica de la forma, $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0,\quad con\ a_n\neq 0$, donde n es un número no negativo y $a_i i=0{,}1$ ..., *n* son números reales.

2 PROPIEDADES DE LAS EXPRESIONES ALGEBRICAS

Las operaciones de suma y producto definidas en las expresiones algebraicas (números y letras – variables), cumplen las mismas propiedades de los números los reales. Veamos algunas de ellas: Sean a, b y c números reales cualesquiera.

Propiedades	Suma	Producto
Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Elemento neutro	$a+0=0+a$	$a\cdot 1=1\cdot a$
Existencia del inverso	$a+(-a)=(-a)+a=0$	$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1, si\ a\neq 0$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$	

Ejemplo 2: Propiedades de las expresiones algebraicas

Propiedades	Suma	Producto
Asociativa	$5x+(6y+7)=(5x+6y)+7$ $5x+6y+7=5x+6y+7$	$5x\cdot(6y\cdot 7)=(5x\cdot 6y)\cdot 7$ $5x\cdot(42y)=(30xy)\cdot 7$ $210xy=210xy$
Conmutativa	$5x+6y=6y+5x$	$5x\cdot 6y=6y\cdot 5x$ $30xy=30yx$
Elemento neutro	$5x+0=0+5x$ $5x=5x$	$5x\cdot 1=1\cdot 5x$ $5x=5x$
Existencia del inverso	$5x+(-5x)=(-5x)+5x$ $5x-5x=-5x+5x$ $0=0$	$5x\cdot\frac{1}{5x}=\frac{1}{5x}\cdot 5x=1$ $\frac{5x}{5x}=\frac{5x}{5x}=1$ $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=1$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$7\cdot(5x+6y)=35x+42y$	

3 OPERACIONES CON POLINOMIOS

Sea $P(x)=x^3-6x^2+2x+4$ y $Q(x)=6x^2+2x+4$

3.1 Adición.

Ejemplo 3: Adición de polinomios $P(x)+Q(x)$

$$\begin{array}{r} x^3-\cancel{6x^2}+2x+4 \\ \cancel{6x^2}+2x+4 \\ \hline x^3 \qquad +4x+8 \end{array}$$

3.2 Sustracción

Ejemplo 4: Sustracción de polinomios $P(x)-Q(x)$

$$\begin{array}{r} x^3-6x^2+\cancel{2x}+\cancel{4} \\ -6x^2-\cancel{2x}-\cancel{4} \\ \hline x^3-12x^2 \end{array}$$

Con la escena interactiva de la página 119 del texto interactivo "Matemáticas Operativas", puedes interactuar, cambiando los coeficientes de los polinomios para que afiances tus conocimientos de suma y resta de polinomios.

3.3 Producto de dos polinomios

Ejemplo 5: Producto de dos polinomios $P(x) \cdot Q(x)$. Se aplica la propiedad distributiva

$$(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) \cdot (6x^2 + 2x + 4)$$

$$\begin{array}{r} 6x^5 + 2x^4 + 4x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ -36x^4 - 12x^3 - 24x^2 \qquad\qquad \\ 12x^3 + \ 4x^2 + 8x \qquad \\ 24x^2 + 8x + 16 \\ \hline \color{red}{6x^5 - 34x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 16x + 16} \end{array}$$

Puedes practicar en tu cuaderno, utilizando los ejercicios propuestos en la escena interactiva, "Operaciones de polinomios ", en la que presentan diferentes operaciones con polinomios, que podrás realizar en tu cuaderno e ingresar tus soluciones, para luego confrontar los resultados y realizar las correcciones, para que aprendas haciendo una y otra vez nuevos ejercicios.(Cayetano R, 2019).

Con base en lo estudiado, lo que practicaste con la escena interactiva anterior y guiándote con los ejemplos 1 al 5, procede a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Realizar las siguientes adiciones o sustracciones de las expresiones algebraicas: $\boldsymbol{P(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 4}$, $\boldsymbol{Q(x) = 6x^2 + 2x + 4}$ **y** $\boldsymbol{R(x) = -2x^2 + 4x - 5}$			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $\boldsymbol{P(x) + Q(x) + R(x)}$	$x^3 - 2x^2 + 8x + 3$	2. $\boldsymbol{P(x) + Q(x)}$	$x^3 + 4x + 8$
3. $\boldsymbol{P(x) + R(x)}$	$x^3 - 8x^2 + 6x - 1$	4. $\boldsymbol{Q(x) + R(x)}$	$4x^2 + 6x - 1$
5. $[\boldsymbol{P(x) + R(x) + Q(x) + R(x)}]$	$x^3 - 4x^2 + 12x - 2$	6. $\boldsymbol{P(x) - Q(x) - R(x)}$	$x^3 - 10x^2 - 4x + 5$

|

7. $\boldsymbol{P(x) - Q(x)}$	$x^3 - 12x^2$	8. $\boldsymbol{P(x) - R(x)}$	$x^3 - 4x^2 - 2x + 9$
9. $\boldsymbol{Q(x) - R(x)}$	$8x^2 - 2x + 9$	10. $\boldsymbol{[P(x) + R(x)] - [Q(x) + R(x)]}$	$x^3 - 12x^2$
Realizar los productos de las siguientes expresiones algebraicas: $\mathbf{P(x) = x + 1}$ **,** $\mathbf{Q(x) = x - 1}$ **y** $\mathbf{R(x) = 2x^2 + 4x - 5}$			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
11. $\boldsymbol{P(x) * Q(x)}$	$x^2 - 1$	12. $\boldsymbol{P(x) * P(x)}$	$x^2 + 2x + 1$
13. $\boldsymbol{Q(x) * Q(x)}$	$x^2 - 2x + 1$	14. $\boldsymbol{P(x) * P(x) * P(x)}$	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
15. $\boldsymbol{Q(x) * Q(x) * Q(x)}$	$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	16. $\boldsymbol{P(x) * Q(x) * R(x)}$	$2x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 5$
17. $\boldsymbol{P(x) * R(x)}$	$2x^3 + 6x^2 - x - 5$	18. $\boldsymbol{Q(x) * R(x)}$	$2x^3 + 2x^2 - 9x + 5$
19. $\boldsymbol{P(x) * Q(x) * Q(x) * Q(x)}$	$x^4 - 2x^3 + 2x - 1$	20. $[P(x) * Q(x)][P(x) * P(x)]$	$x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

4 PRODUCTOS NOTABLES

Ciertos productos de binomios se presentan con tanta frecuencia que debe aprender a reconocerlos. Empezamos con el producto de dos binomios $ax + b$ y $cx + d$

4.1 Producto de dos binomios

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Ejemplo 6: Producto de dos binomios

a. $(x + 3)(x + 2)$
$$(x + 3)(x + 2) = x^2 + (3 + 2)x + 3 \cdot 2$$
$$= x^2 + 5x + 6$$

b. $(5x + 3)(2x + 2)$
$$(5x + 3)(2x + 2) = (5 \cdot 2)x^2 + (5 \cdot 2 + 3 \cdot 2)x + 3 \cdot 2$$
$$= 10x^2 + (10 + 6)x + 6$$

$$= 10x^2 + 16x + 6$$

4.2 Cuadrado de un binomio $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^2$

$$(a \pm b)^2 = (a)^2 \pm 2(a) \cdot (b) + (b)^2$$

Ejemplo 7: Cuadrado de un binomio

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2) \cdot (y^2) + (y^2)^2$$
$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$(x^2 - y^2)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2) \cdot (y^2) + (y^2)^2$$
$$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4$$

4.3 Producto de la suma por la diferencia

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo 8: Producto de la suma por la diferencia

4.4 Cubo de un binomio $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^3$

$$(a \pm b)^3 = (a)^3 \pm 3(a)^2 \cdot (b) + 3(a) \cdot (b)^2 \pm (b)^3$$

Ejemplo 9: Cubo de un binomio

a. $(x + 2)^3 = (x)^3 + 3(x)^2 \cdot (2) + 3(x) \cdot (2)^2 + (2)^3$
$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b. $(x - 2)^3 = (x)^3 - 3(x)^2 \cdot (2) + 3(x) \cdot (2)^2 - (2)^3$
$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

4.5 Trinomio cuadrado $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{c})^2$

$$(x + \mathrm{y} + \mathrm{c})^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2y(c) + 2xc + c^2$$

Ejemplo 10: Trinomio cuadrado

$$(x + \mathrm{y} + 9)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2y(9) + 2x(9) + 9^2$$
$$= x^2 + 2xy + y^2 + 18y + 18x + 81$$

|

4.6 Suma de Cubos $a^3 + b^3$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo 11: Suma de cubos

$$8x^3 + 27y^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

4.7 Diferencia Cubos $a^3 - b^3$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo 12: Diferencia de cubos

$$8x^3 - 27y^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$$

Puedes practicar en tu cuaderno, utilizando los ejercicios propuestos en la escena interactiva, "Productos Notables", de la página 133 del libro interactivo "Matemáticas Operativas".

Con base en lo estudiado y guiándose con los ejemplos 6 al 12, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

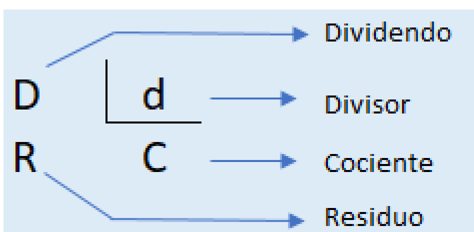
Realizar la siguientes productos notables de expresiones algebraicas			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $(3x + 5)^2$	$9x^2 + 30x + 25$	2. $(x^2 - 2)^3$	$x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$
3. $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$	$4x^2 - y$	4. $\left(\sqrt{h^2+1} + 1\right)\left(\sqrt{h^2+1} - 1\right)$	h^2
5. $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{a} - \frac{1}{b}\right)$	$\left(a - \frac{1}{b^2}\right)$	6. $(5s - t)^2$	$25s^2 - 10st + t^2$
7. $(1 - 2y)^3$	$1 - 6y + 12y^2 - 8y^3$	8. $(3a - b^2)(9a^2 + 3ab^2 + b^4)$	$27a^3 - b^6$
9. $(5x + y^2)(25x^2 - 5xy^2 + y^4)$	$125x^3 + y^6$	10. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$	$\frac{4}{x}$

SEMANA 5

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Antes de intentar realizar una división de polinomios, es conveniente recordar los términos de la división.

Algoritmo de división para polinomios	Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $\mathrm{r}(x)$tales que $f(x) = p(x) \cdot q(x) + \mathrm{r}(x),$
	donde ya sea $\mathrm{r}(x) = 0$ o el grado de $\mathrm{r}(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ es el cociente y $\mathrm{r}(x)$ es el residuo en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.



La división establece cuantas veces está contenido el divisor en el dividendo, esto es el cociente C.

5.1 Propiedades de la división de polinomios

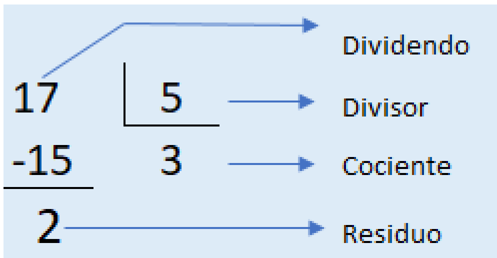
- En toda división el grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.
- En toda división el grado del divisor es mayor que el grado del residuo.
- En toda división el grado máximo del residuo es igual al grado del divisor menos uno.

5.2 Prueba de la división

Al producto del cociente (C) por el divisor (d), se le suma el residuo (R) y tiene que ser igual al dividendo (D).

$$(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{D}$$

Ejemplo 13: Prueba de la división $\frac{17}{5}$



Prueba:

$$(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{D} = (\mathbf{3} \cdot \mathbf{5}) + \mathbf{2} = \mathbf{15} + \mathbf{2} = \mathbf{17}$$

Teniendo en cuenta estos conceptos, podemos realizar la división de polinomios.

Observa que, en la división se busca un número en el cociente (C) que al multiplicarlo por el divisor (d), sea igual o se acerque al dividendo. En el ejemplo anterior, el número que más se acerca es el tres, ya que $(5 \cdot 3) = 15$ y es el que más se acerca al 17. Tienes que tener en cuenta que el producto 15, pasa con signo contrario.

Existen dos formas de hacer la división, una es la división larga y la otra la división sintética.

5.3 División larga o Euclidiana

Esta forma de división permite que el divisor sea de un grado superior a uno, mientras que la división sintética, sólo permite que el divisor sea de grado uno (1). Para el ejemplo que se presenta no se puede hacer la división sintética.

Ejemplo 14: División larga

$\frac{-9x^4+9x^3-14x^2+8x}{3x^2-2x}$, siempre que vayas a realizar una división de polinomios, debes tener en cuenta ordenar tanto el dividendo (numerador) como el denominador (divisor) de mayor a menor grado y en caso de que falte uno, deja un espacio que puedes llenar con un cero.

En el ejemplo que se plantea, observa que el polinomio está ordenado 4,3,2,1 para el dividendo y 2,1 para el divisor.

$$
\begin{array}{rl}
-9x^4 + 9x^3 - 14x^2 + 8x & \underline{\big|\; 3x^2 - 2x \quad} \\
\underline{+9x^4 - 6x^3 \qquad\qquad\qquad} & -3x^2 + x - 4 \\
0 + 3x^3 - 14x^2 + 8x & \\
-3x^3 + 2x^2 \qquad & \\
\overline{\qquad 0 - 12x^2 + 8x} & \\
+12x^2 - 8x & \\
\overline{\qquad\qquad 0} &
\end{array}
$$

Nota: Para este ejemplo en particular, se había podido sacar factor común "x" en el numerador y denominador, luego simplificar y se puede resolver por división sintética.

Prueba de la división:

$$(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{-3x^2 + x - 4}) \cdot (\boldsymbol{3x^2 - 2x}) + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{-9x^4 + 9x^3 - 14x^2 + 8x}$$

Comprobemos aplicando la propiedad distributiva:

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{-9x^4 + 6x^3} \\
\qquad\quad \boldsymbol{+3x^3 - 2x^2} \\
\underline{\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{-12x^2 + 8x}} \\
\boldsymbol{-9x^4 + 9x^3 - 14x^2 + 8x + 0}
\end{array}
$$

Puedes practicar en tu cuaderno, utilizando los ejercicios propuestos en la escena interactiva, "División de polinomios" de la página 139 del libro interactivo de Matemáticas Operativas", en la que podrás usar el deslizador "Pasos", para que aprendas a realizar la división larga (Euclidiana) de polinomios, paso a paso. La escena fue adaptada de (Martínez, 2019).

5.4 División Sintética

Descrita por Paolo Ruffini en 1816, es conocida como la regla de Ruffini y facilita el cálculo de la división de cualquier polinomio entre un binomio de la forma (x-a), es decir, el divisor es de grado uno.

Ejemplo 15: División sintética

$\frac{x^3-2x^2+5x+3}{x-2}$, para este ejercicio se pueden hacer las dos formas de división, dado que el divisor es de grado 1.

	3	0	-7	5	
2		6	12	10	
	3	6	5	15	Residuo

Cocicente

$3x^2+6x+5$

0

Puedes practicar en tu cuaderno, utilizando los ejercicios propuestos en la escena interactiva, “Método de Ruffini” de la página 142 del libro interactivo de Matemáticas Operativas”, en la que podrás usar el deslizador “Pasos”, para que aprendas a utilizar el método de Rufinni, paso a paso. La escena fue adaptada de (Matematicaula, 2019b)

Ejemplos 16: La división sintética comparada con la división larga

División Larga o Euclidiana	División Sintética

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+0x^2-7x+5 & x-2 \\ \cline{2-2} -3x^3+6x^2 & 3x^2+6x+5 \\ \hline 0+6x^2-7x+5 & \\ -6x^2+12x & \\ \hline 0+5x+5 & \\ -5x+10 & \\ \hline 0+15 & \end{array}$$

	3	0	-7	5	
2		6	12	10	
	3	6	5	15	Residuo

Cocicente

$3x^2+6x+5$

Observa que en la división sintética para obtener el cociente se le bajó un grado al polinomio, por haber divido por $x-2$, esto es $\frac{x^3}{x}=x^2$

Prueba de la división:

$$\boldsymbol{D=(C\cdot d)+R}$$

$$\boldsymbol{D}=(3x^2+6x+5)\cdot\boldsymbol{(x-2)+15}$$

Aplicamos la ley distributiva

$$\boldsymbol{D=3x^3+\cancel{6}x^2+5x-\cancel{6}x^2-12x-10+15}$$

Sumamos términos semejantes

$$\boldsymbol{D=3x^3-7x+5}$$

Con base en lo estudiado, con la práctica de la escena anterior y guiándose con los ejemplos 13 y 16, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

|

Realizar la división de las siguientes expresiones algebraicas por el método apropiado			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $(6x^2 - 26x + 12) \div (x - 4)$	Cociente: $6x - 2$ Residuo: 4	2. $(8x^4 + 6x^2 - 3x + 1) \div (2x^2 - x + 2)$	Cociente: $4x^2 + 2x$ Residuo: $-7x + 1$
3. $(3a^{x+5} + 19a^{x+3} - 10a^{x+4} - 8a^{x+2} + 5a^{x+1}) \div (a^2 - 3a + 5)$	Cociente: $3a^{x+3} - a^{x+2} + a^{x+1}$ Residuo: 0	4. $(-3x^4 + 2x^3 + 23x^2 + 14x - 8) \div (x^2 - 2x - 4)$	Cociente: $3x^2 - 4x + 3$ Residuo: $4x + 4$
5. $(x^3 + 2x^2 - 4x + 5) \div (x + 3)$	Cociente: $x^2 - x - 1$ Residuo: 8	6. $(4x^3 + 6x^2 + 5x + 6) \div (2x^2 + x + 3)$	Cociente: $2x + 2$ Residuo: $-3x$
7. $(2x^3 + 4x^2 + 2x + 4) \div (2x^2 + x + 4)$	Cociente: $x + \frac{3}{2}$ Residuo: $-\frac{7}{2}x - 2$	8. $(x^3 + 3x^2 - 6x + 4) \div (-x^2 - 2x + 7)$	Cociente: $-x - 1$ Residuo: $-x + 11$
9. $(4x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (2x^2 + x + 6)$	Cociente: $2x + 2$ Residuo: $-3x - 9$	10. $(2x^3 - 2x^2 + 4x + 6) \div (-x^2 - 5x + 5)$	Cociente: $-2x + 12$ Residuo: $74x - 54$

Puedes practicar, resolviendo en tu cuadernos las opciones de operaciones algebraicas que se proponen en las escenas interactivas de la página 143 y 144 del texto interactivo "Matemáticas Operativas", opción 1, opción 2 y opción 3.

|

6 FACTORIZACIÓN

Aplicamos la propiedad distributiva para expandir las expresiones algebraicas, aunque en algunos casos es conveniente invertir el proceso.

La factorización o descomposición factorial es representar una expresión matemática en forma de multiplicación. Con la factorización, se busca convertir un polinomio en factores (polinomios) más simples.

FACTORIZACIÓN →

$$9x^2 - 9 = (3x+3)(3x-3)$$

← EXPANSIÓN

6.1 Factor común

Como su nombre lo indica, es buscar los elementos comunes, tanto de los coeficientes como de las variables con su menor exponente.

Ejemplo 17: Factor común

$$3x^2 - 6x$$
$$3x(x-2)$$

$$a^2 + ab + ax + bx$$
$$a(a+b) + x(a+b)$$

$$(a+b)(a+x)$$

Aplicando la propiedad asociativa, se pueden resolver ejercicios de factor común por agrupación de términos.

Visita las escenas interactivas de las páginas 148 y 149 del libro interactivo de aprendizaje “Matemáticas Operativas”, para que te familiarices con la determinación de los factores comunes de los coeficientes y los literales.

6.2 Factor común por agrupación de términos

Por lo general, son polinomios de cuatro términos que se pueden agrupar de dos en dos, dando nuevamente otro factor común.

Ejemplo 18: Factor común por agrupación de términos

$$a^2 + ab + ax + bx$$

Podemos agrupar el primer término con el segundo y el tercero con el cuarto.

$$(a^2 + ab) + (ax + bx)$$
$$a(a+b) + x(a+b)$$

Como se puede observar, nuevamente tenemos como factor común $(a+b)$

$$(a+b)(a+x)$$

6.3 Trinomio de la forma x^2+bx+c

Se resuelve por ensayo y error. Se buscan números que multiplicado den el término independiente (último término) y sumados o restados den el de la mitad. Es conveniente descomponer el término independiente en sus factores primos.

Ejemplo 19: Trinomio de la forma x^2+bx+c

12	2
6	2
3	3
1	4 x 3

$$x^2+7x+12$$
$$(x+4)(x+3)$$

Visita las escena interactiva de la página 154 del libro interactivo de aprendizaje "Matemáticas Operativas", para que te familiarices con la factorización del trinomio de la forma x^2+bx+c , y realices diversos ejercicios propuestos en el escena.

6.4 Trinomio de la forma ax^2+bx+c

Como el caso anterior, se resuelve por ensayo y error; adicional se debe descomponer el coeficiente **a** en sus factores primos.

Ejemplo 20: Trinomio de la forma ax^2+bx+c

6	2
3	3
1	3 x 2

$$6x^2+7x-5$$
$$(3x+5)(2x-1)$$

5	5
1	5 x 1

Visita las escena interactiva de la página 159 del libro interactivo de aprendizaje "Matemáticas Operativas", para que te familiarices con la factorización del trinomio de la forma ax^2+bx+c , y realices diversos ejercicios propuestos en el escena.

SEMANA 6

6.5 Trinomio cuadrado perfecto

Este caso corresponde al producto notable del cuadrado de un binomio y para identificarlo, se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Que el primer y último término sean cuadrados

- Que el término de la mitad sea el doble producto de las raíces cuadradas del primer y último término. Una vez cumpla esto, podemos decir que es un trinomio cuadrado perfecto.
- Se pone el signo del término de la mitad y por último se eleva al cuadrado.

Ejemplo 21: Trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

Tienen raíz cuadrada

$$x \qquad\qquad 3$$

$$\boxed{2 \cdot (3) \cdot x = 6x}$$

El término de la mitad es el doble producto de las raíces cuadradas

$$4x^2 - 4xy + y^2$$

$$2x \qquad\qquad y$$

$$(2x - y)^2$$

6.6 Diferencia de cuadrados

El resultado de la diferencia de cuadrados obedece al producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de cada uno de sus términos.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ejemplo 22: Diferencia de cuadrados

a. $4x^2 - 9y^2 = (2x+3y)(2x-3y)$
b. $36m^2 - 25n^2 = (6m+5n)(6m-5n)$

En el trinomio cuadrado perfecto como caso especial, incluiremos el Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción.

6.7 Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción

Se utiliza la metodología anterior, sacando raíz cuadrada al primer término y al último término, tal como se hace para el caso anterior y se duma o resta la cantidad que se requiera para conservar el término de la mitad.

Ejemplo 23: Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción

$$a^4 + a^2 + 1$$

$$a^2 \qquad\qquad 1$$

$$\boxed{2 \cdot a^2 \cdot (1) = 2a^2}$$

Observa que el primer y último término, tienen raíz cuadrada, pero al término de la mitad le sobra una a^2, por lo que se hace necesario restársela al solucionar el trinomio cuadrado perfecto, esto es:

$$(a^2+1)^2-a^2$$

Luego tengan en cuenta que se presenta una diferencia de cuadrados, que es necesario resolverla.

$$[(a^2+1)+a][(a^2+1)-a]$$

$$[a^2+a+1][a^2-a+1]$$

$$(a^2+a+1)(a^2-a+1)$$

NOTA: Por la combinación de los casos de factorización anteriores, se pueden obtener casos especiales en:

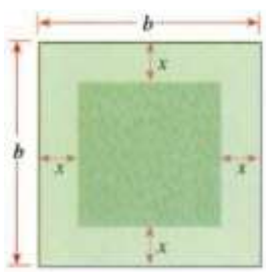
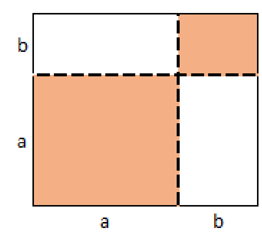
- Diferencia de cuadrados
- Combinación de Trinomio Cuadrado Perfecto y Diferencia de Cuadrados

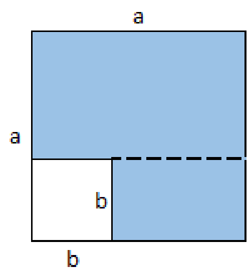
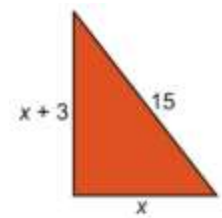
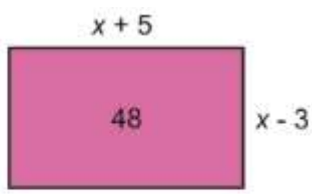
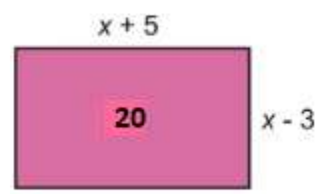
Visita la escena interactiva "Trinomio cuadrado perfecto por adición o sustracción", para que te familiarices con este caso de factorización, que te será de utilidad para cálculo integral, y realices diversos ejercicios propuestos en la escena.

Con base en lo estudiado y guiándose con los ejemplos 17 al 23, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Realizar las siguientes factorizaciones por el método adecuado			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $25a^4+54a^2b^2+49b^4$	$(5a^2+4ab+7b^2)(5a^2-4ab+7b^2)$	2. $81m^8+2m^4+1$	$(9m^4+4m^2+1)(9m^4-4m^2+1)$
3. $4a^8-53a^4b^4+49b^8$	$(2a^4-7b^4+5a^2b^2)(2a^4-7b^4-5a^2b^2)$	4. $25x^4-139x^2y^2+81y^4$	$(5x^2+7xy-9y^2)(5x^2-7xy-9y^2)$
5. $2m^8n^9+2m^8n^{14}x$	$(2m^8n^9)(1+n^5x)$	6. $32x^{14}y^{13}+32x^{13}y^9+4x^{11}y^{10}$	$4x^{11}y^9(8x^3y^7+8x^2+y)$

Realizar las siguientes factorizaciones por el método adecuado			
7. $a(x-1)-(x+2)(x-1)$	$(x-1)(a-x-2)$	8 $a^2+1-b(a^2+1)$.	$(a^2+1)(1-b)$
9. $n^2x-5a^2y^2-n^2y^2+5a^2x$	$(x-y^2)(n^2+5a^2)$	10. $am-bm+an-bn$	$(a-b)(m+n)$
11. $4-4(1-a)+(1-a)^2$	$[2-(1-a)]^2$ $(1+a)^2$	12. $\frac{1}{25}-\frac{x^2}{3}+\frac{25x^4}{36}$	$\left(\frac{1}{5}-\frac{5x^2}{6}\right)^2$
13. $16x^6-2x^3y^2+\frac{y^4}{16}$	$\left(4x^3-\frac{y^2}{4}\right)^2$	14. $a^2+2a(a+b)+(a+b)^2$	$[a+(a+b)]^2$ $[2a+b]^2$
15. $196x^2y^4-225z^{12}$	$(14xy^2+15z^6)(14xy^2-15z^6)$	16. $1-9a^2b^4c^6d^8$	$(1+3ab^2c^3d^4)(1-3ab^2c^3d^4)$
17. $\frac{1}{4}-9a^2$	$\left(\frac{1}{2}+3a\right)\left(\frac{1}{2}-3a\right)$	18. $\frac{1}{16}-\frac{4x^2}{49}$	$\left(\frac{1}{4}+\frac{2x}{7}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{2x}{7}\right)$
19. $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2z^4}{81}$	$\left(\frac{x}{10}+\frac{yz^2}{9}\right)\left(\frac{x}{10}-\frac{yz^2}{9}\right)$	20. $100m^2n^4-\frac{x^8}{16}$	$\left(10mn^2+\frac{x^4}{4}\right)\left(10mn^2-\frac{x^4}{4}\right)$
21. a^4+a^2+1	$(a^2+a+1)(a^2-a+1)$	22. $x^4+x^2y^2+y^4$	$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
23. $(x-y)^2+2(x-y)-24$	$(x-y+6)(x-y-4)$	24. $a^4-3a^2b^2+b^4$	$(a^2+ab-b^2)(a^2-ab-b^2)$
25. $y^2+5y-24$	$(y+8)(y-3)$	26. $m^2-20m-300$	$(m-30)(m+10)$
27. $x^2-17x-60$	$(x-20)(x+3)$	28. $x^2-15x-54$	$(x-18)(x+3)$
29. $c^2-13c-14$	$(c-14)(c+1)$	30. $a^2+33-14a$	$(a-11)(a-3)$
31. $30x^2+13x-10$	$(6x+5)(5x-2)$	32. $20a^2-7a-40$	$(5a-8)(4a+5)$
33. $14m^2-31m-10$	$(7m+2)(2m-5)$	34. $9x^2+37x+4$	$(9x+1)(x+4)$
35 $15a^2-8a-12$	$(5a-6)(3a+2)$	36. $20n^2-9n-20$	$(5n+4)(4n-5)$

Realizar las siguientes factorizaciones por el método adecuado			
37. $25a^4+54a^2b^2+49b^4$	$(5a^2+4ab+7b^2)(5a^2-4ab+7b^2)$	38. $81m^8+2m^4+1$	$(9m^4+4m^2+1)(9m^4-4m^2+1)$
39. $16-104x^2+169x^4$	$(4-13x^2)^2$	40. $\frac{a^2}{4}-ab+b^2$	$\left(\frac{a}{2}-b\right)^2$
41. $a^2+ab+ax+bx$	$(a+b)(a+x)$	42. $ax-2bx-2ay+4by$	$(a-2b)(x-2y)$
43. $3m-2n-2nx^4+3mx^4$	$(1+x^4)(3m-2n)$	44. $4a^3-1-a^2+4a$	$(a^2+1)(4a-1)$
45. $3x^2-6x$	$3x(x-2)$	46. $8x^4y^2+6x^3y^3-2xy^4$	$2xy^2(4x^3+3x^2y-y^2)$
Ejercicios de aplicación			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. Determine el área de la parte podada en la siguiente gráfica.  Respuesta: 4*x*(*b*-*x*)		2. Determine el área de la región sombreada en la siguiente gráfica.  Respuesta: $(a^2+b^2)=(a+b)^2-2ab$	
3. Determine el área de la parte podada en la siguiente gráfica.		4. Un lado de un triángulo rectángulo es 3 pies más largo que el otro lado. La hipotenusa es de 15 pies. Encuentra las dimensiones del triángulo.	

Realizar las siguientes factorizaciones por el método adecuado	
 Respuesta: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	 Respuesta: $15^2 = x^2 + (x+3)^2$, Lados = 9 y 12
5. Un rectángulo tiene lados de una longitud de x+5 y x−3. ¿Qué número es x si el área del rectángulo es 48?  Respuesta: $(x-3)(x+5) = x^2 + 2x - 15 = 48$, Lados = 4 y 12	6. Resuelva el punto anterior, si el área del rectángulo fuera 20.  Respuesta: $(x-3)(x+5) = x^2 + 2x - 15 = 20$, Lados = 2 y 10

SEMANA 7

7 TEOREMA DEL RESIDUO

Es el procedimiento por medio del cual obtenemos el residuo de una división de polinomios, donde el divisor es de grado uno, sin necesidad de hacer la división larga (Euclidiana) o la sintética.

Para ello, lo que tenemos que hacer es igualar el divisor a cero y evaluar el polinomio en ese valor.

Observa detenidamente el video “Aplicación del teorema del residuo”, en el cual se explica el proceso para obtener el residuo de un polinomio. (Ríos G, 2014a).

Ejemplo 36: Teorema del residuo

a. $(12x^3 + 13x^2 - 59x + 30) \div (x - 5)$
$x = 5$, ahora reemplazamos este valor en el dividendo,
$12(5)^3 + 13(5)^2 - 59(5) + 30$
$1500 + 325 - 295 + 30$
1560, este es el residuo.

b. $(6x^3 - 7x^2 - 5) \div (3x + 1)$
$x = -\frac{1}{3}$, ahora reemplazamos este valor en el dividendo,

$$6\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 7\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 5$$

$$\frac{-6}{27} - \frac{7}{9} - 5 = -\frac{2}{9} - \frac{7}{9} - 5 = -1 - 5 = -6$$
$Residuo = -6$

8 TEOREMA DEL FACTOR

$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ es un factor de un polinomio $P(x)$, si y sólo sí al evaluar $P(a) = 0$

Antes iniciar con el ejemplo 38, visita el video "Factorización por evaluación (Usando la división sintética) - Ejercicio 1", en el cual se soluciona un ejercicio de factorización por el método de evaluación y se muestra el orden en que se deben analizar los diferentes casos de factorización de un polinomio. (Ríos G, 2016a)

Ejemplo 37: Si $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$, como el primer término del polinomio es diferente de 1, los ceros racionales de P son de la forma

Posible cero racional de $P = \frac{Factores\ del\ término\ constante}{Factores\ del\ coeficiente\ principal}$. El término constante es 6 y el coeficiente principal es 2, por lo tanto, posible cero racional de $P = \frac{Factores\ de\ 6}{Factores\ de\ 2}$

Ahora, los factores de 6 son $6{:}\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ y los factores de 2 son $\pm1, \pm2$. Así los posibles ceros racionales de P son:

$$\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{3}{1}, \pm\frac{6}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{6}{2}$$

Resumiendo, nos queda $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$

Para comprobar los posibles ceros de $P(x)$, reemplazamos cada uno de los factores anteriores para ver cual hace $P(x) = 0$

$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = 2 + 1 - 13 + 6 = 4$, no es un cero de $P(x)$

$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6 = -2 + 1 + 13 + 6 = 18$, no es un cero de $P(x)$

$P(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 16 + 4 - 26 + 6 = 0$, **es un cero de $\boldsymbol{P(x)}$**

$(x - 2)$ es el primer factor de $P(x)$.

Ahora resolvemos en la misma forma que se hizo con la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -13 & 6 \\ 2 & & 4 & 10 & -6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

Residuo

Cocicente

$2x^2 + 5x - 3$

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6 = (2x^2 + 5x - 3)(x - 2)$$

Se puede repetir el proceso anterior, pero como el cociente es de la forma $ax^2 + bx$+c, lo podemos factorizar por tanteo (ensayo-error.)

$$(2x - 1)(x + 3)$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & 3 & 6x \\ \underline{1x} & \underline{-1} & \underline{-1x} \\ 2x^2 & 3 & 5x \end{array}$$

Finalmente, los ceros de $P(x) = (x - 2)(2x - 1)(x + 3)$

Observa detenidamente el video "Factorización por evaluación (Usando división sintética) - Ejercicio 2", en el cual se explica el proceso para obtener los factores de un polinomio por el método de evaluación, usando la división sintética o método de Rufinni. (Ríos G, 2016b).

Con base en lo estudiado y guiándose con los ejemplos 36 y 37, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Encontrar los ceros de los siguientes polinomios			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $x^3 - x^2 - 14x + 24$	$x = -4, 2\ y\ 3$	2. $x^3 - 3x + 2$	$x = -2\ y\ 1$

3. $2x^3+x^2-13x+6$	$x=\frac{1}{2},2$	4. $x^4-5x^3-5x^2+23x+10$	$x=-2;1\pm\sqrt{2};5$
5. $2x^5+5x^4-8x^3-14x^2+6x+9$	$x=-3;-1;1;\frac{3}{2}$	6. $2x^3-7x^2+2x+3$	$x=-\frac{1}{2};1\ y\ 3$
7. $5x^3-x^2-5x+1$	$x=-1;1;\frac{1}{5}$	8. x^3+3x^2-4	$x=-1\ y\ 2$
9. x^3-4x^2+x+6	$x=-1;\ 2;3$	10. $3x^3+4x^2-x-2$	$x=-1;\frac{2}{3}$

9 OPERACIONES RACIONALES CON POLINOMIOS

9.1 Adición de expresiones racionales

De igual forma que en las sumas de fraccionarios, en caso de tener el mismo denominador se suman los numeradores y se coloca el mismo denominador. Si se trata de expresiones racionales con polinomios de distinto denominador (heterogéneas), se debe buscar el mínimo común múltiplo de los denominadores (mcm) y se procede tal como se hace para la suma de fraccionarios con distinto denominador.

Procedimiento

- Se deben factorizar los denominadores
- Determinar el mcm de los denominadores que se factorizaron). Para hacerlo, se toma los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.
- Se procede como se indicó en la página 7 de la presente guía.
- No olviden factorizar y simplificar, si es el caso.

Ejemplo 24: Adición y simplificación de expresiones racionales

a. $\frac{x^2+3x}{x+1}+\frac{1-x}{x+1}$

$$\frac{x^2+3x}{x+1}+\frac{1-x}{x+1}=\frac{x^2+3x+1-x}{x+1}$$
$$=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$$
$$=\frac{(x+1)^2}{x+1}$$
$$=\frac{(x+1)^2}{x+1}=x+1$$

b. $\frac{x^2-3}{x^2+2x+1}+\frac{x+3}{x+1}$ Factorizar los denominadores

$\frac{x^2-3}{(x+1)^2}+\frac{x+3}{x+1}$ Determinar el común denominador (mcm de los denominadores) y se aplica la propiedad distributiva.

$$\frac{x^2-3+(x+3)(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2-3+x^2+3x+x+3}{(x+1)^2}$$

$\frac{x^2-3+(x+3)(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$ Sumamos términos semejantes en el numerador

$\frac{x^2-3+(x+3)(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$ Factorizamos el numerador y se simplifica, si es el caso.

$$\frac{x^2-3+(x+3)(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

9.2 Sustracción de expresiones racionales

De igual forma que en las restas de fraccionarios, en caso de tener el mismo denominador se restan los numeradores y se coloca el mismo denominador. Si se trata de expresiones racionales con polinomios de distinto denominador (heterogéneas), se debe buscar el mcm de los denominadores y se procede tal como se hace para la resta de fraccionarios con distinto denominador (heterogéneas).

Procedimiento

- Se deben factorizar los denominadores
- Determinar el mcm de los denominadores que se factorizaron). Para hacerlo, se toma los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.
- Se procede como se indicó en la página 7 de la presente guía.
- No olviden factorizar y simplificar, si es el caso.

Ejemplo 25: Sustracción de expresiones racionales

a. $\frac{x^2+3x}{x+1}-\frac{1-x}{x+1}$

$$\frac{x^2+3x}{x+1}-\frac{1-x}{x+1}=\frac{x^2+3x-(1-x)}{x+1}$$

$$=\frac{x^2+3x-1+x}{x+1}$$

$$=\frac{x^2+4x-1}{x+1}$$

En este caso se deja hasta este paso, dado que sólo se puede factorizar por la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

b. $\frac{x^2-3}{x^2-2x+1} - \frac{x+3}{x-1}$ Factorizar los denominadores

$\frac{x^2-3}{(x-1)^2} - \frac{x+3}{x-1}$ Determinar el mcm y se aplica la propiedad distributiva.

$$\frac{x^2-3-(x+3)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-3-(x^2+3x-x-3)}{(x-1)^2}$$

$\frac{x^2-3-x^2-2x+3}{(x-1)^2} = \frac{-2x}{(x-1)^2}$ Sumamos términos semejantes en el numerador

$$= -\frac{2x}{(x-1)^2}$$

9.3 Producto de expresiones racionales

Para realizar el producto de expresiones racionales con polinomios, se procede de igual forma que con las expresiones racionales que se vieron en el primer elemento de competencia "Teoría de Aritmética". Es el resultado del producto de los numeradores dividido el producto de los denominadores, es decir; el producto de numeradores y denominadores entre sí.

Se recomienda:

- Factorizar tanto numerador como denominador y tratar de simplificar, antes de realizar los productos.
- Simplificar, si es posible y
- Finalmente realizar los productos.

Ejemplo 26: Producto de expresiones racionales

a. $\frac{x}{5x^2+21x+4} \cdot \frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}$, Factorizar numeradores y denominadores, luego simplificar

$$\frac{x}{5x^2+21x+4} \cdot \frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{(5x+1)} \cdot (x+4)} \cdot \frac{\cancel{(5x+1)} \cdot (5x+1)}{\cancel{x} \cdot (3x+1)}$$

$$= \frac{(5x+1)}{(x+4) \cdot (3x+1)}$$

b. $\frac{x^2+8x+16}{(x^2-5x)} \cdot \frac{(x-5)}{(x^2-16)}$, Factorizar numeradores y denominadores, luego simplificar

$$\frac{x^2+8x+16}{(x^2-5x)} \cdot \frac{(x-5)}{(x^2-16)} = \frac{(x+4)^{\cancel{2}}}{x \cdot \cancel{(x-5)}} \cdot \frac{\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x+4)} \cdot (x-4)} = \frac{(x+4)}{x \cdot (x-4)}$$

9.4 División de expresiones racionales

Para realizar divisiones de expresiones racionales con polinomios, se procede de igual forma que con las expresiones racionales que se vieron en el primer elemento de competencia "Teoría de Aritmética". Es el resultado de multiplicar el numerador del primer fraccionario por el denominador del segundo fraccionario, dividido por la multiplicación del denominador del primer fraccionario por el numerador del segundo fraccionario.

Se recomienda:

- Factorizar tanto numerador como denominador y tratar de simplificar, antes de realizar la división.
- Simplificar, si es posible y
- Finalmente realizar la división.
-

Ejemplo 27: División de expresiones racionales

a. $\frac{x+2}{2x-3} \div \frac{x^2-4}{2x^2-3x}$, Factorizar numeradores y denominadores, luego realizar el producto de extremos y medios, para finalmente simplificar.

$$\frac{x+2}{2x-3} \div \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x\cdot(2x-3)} = \frac{\cancel{(x+2)} \cdot x \cdot \cancel{(2x-3)}}{\cancel{(2x-3)} \cdot \cancel{(x+2)} \cdot (x-2)} = \frac{x}{(x-2)}$$

b. $\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3} \div \frac{2x+5}{x+3}$, Factorizar numeradores y denominadores, luego realizar el producto de extremos y medios, para finalmente simplificar.

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3} \div \frac{2x+5}{x+3} = \frac{(2x+5)\cdot(x+2)}{(x+3)\cdot(x+1)} \div \frac{2x+5}{x+3}$$

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3} \div \frac{2x+5}{x+3} = \frac{\cancel{(2x+5)} \cdot (x+2) \cdot \cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)} \cdot (x+1) \cdot \cancel{(2x+5)}} = \frac{(x+2)}{(x+1)}$$

Con base en lo estudiado y guiándose con los ejemplos 24 al 27, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado y simplificar, si es posible			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x+2}$	$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)}$	2. $\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{(x+1)^2}$	$\frac{3-x}{(x-1)(x+1)^2}$
3. $\frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{x}{y}}$	$-\frac{(x+y)}{(x-y)}$	4. $\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$	$\frac{-1}{a(a+h)}$
5.. $\frac{x^{5/2}-x^{1/2}}{x^2-1}$	$x^{1/2}$	6. $\frac{x^{-3/2}+2x^{-1/2}+x^{1/2}}{x^{-3/2}}$	$(x+1)^2$
7. $\frac{x(2+x)^{-2/3}+(2+x)^{1/3}}{(2+x)^{-2/3}}$	$2(1+x)$	8. $\frac{3x^{3/2}-9x^{1/2}+6x^{-1/2}}{3x^{-1/2}}$	$(x-1)(x-2)$
9. $(-x+3)(-x+5)$	$x^2-8x+15$	10. $(7x-3)(4x+2)$	$28x^2+2x-6$
11. $\frac{x^2-25}{3x^2+11x+10}*\frac{4x+8}{x^2-2x-15}$	$\frac{4(x+5)}{(3x+5)(x+3)}$	12. $\frac{6a^2bx^2}{ab^2x^4}*\frac{-4a^2bx^2}{3a^2bx}$	$\frac{-8a}{bx}$
13. $\frac{2}{xy}-\frac{3y^2-x^2}{xy^3}+\frac{xy+y^2}{x^2y^2}$	$\frac{x^3+y^3}{x^2y^3}$	14. $\frac{a}{x^2-4}+\frac{b}{(x-2)^2}$	$\frac{a(x-2)+b(x+2)}{(x+2)(x-2)^2}$
15. $\frac{1}{2x-3y}-\frac{x+y}{4x^2-9y^2}$	$\frac{x+2y}{(2x+3y)(2x-3y)}$	16. $\frac{5x}{6(x^2-1)}-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{3(x+1)}$	$\frac{4x-5}{6(x+1)(x+1)}$
17. $\frac{2x^{1/3}(x-2)^{2/3}-5x^{4/3}(x-2)^{-1/3}}{(-3x-4)x^{1/3}}$	$(x-2)^{-1/3}$	18. $\frac{3x^{3/2}-9x^{1/2}-120x^{-1/2}}{x-8}$	$3x^{-1/2}(x+5)$
19. $\frac{(x+a)(4x+8)(x+b)}{x^2+x(a+b)+ab}$	$(4x+8)$	20. $(x+a)(x+b)$	$x^2+x(a+b)+ab$

10 RACIONALIZACIÓN

Generalmente la racionalización consiste en utilizar operaciones matemáticas que permitan eliminar los radicales, ya sea en el numerador o en el denominador según el caso.

|

10.1 Racionalización de numeradores.

Ejemplo 28: Racionalización de numeradores

a. Si $h \neq 0$, racionalizar el numerador. Para hacerlo, se debe multiplicar el numerador y el denominador por la conjugada del numerador.

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$, Observa que el numerador se ha convertido en el producto de la suma por la diferencia, que es el resultado de una diferencia de cuadrados.

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h \cdot (\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{x+h-x}{h \cdot (\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

b. $\frac{2\sqrt{\mathrm{a}}+3\sqrt{\mathrm{b}}}{2\mathrm{a}-3\mathrm{b}+\sqrt{ab}}$, Multiplicamos el numerador y el denominador por la conjugada del numerador.

$\frac{2\sqrt{\mathrm{a}}+3\sqrt{\mathrm{b}}}{2\mathrm{a}-3\mathrm{b}+\sqrt{ab}} \cdot \frac{(2\sqrt{\mathrm{a}}-3\sqrt{\mathrm{b}})}{(2\sqrt{\mathrm{a}}-3\sqrt{\mathrm{b}})}$, aplicamos propiedad distributiva en el numerador y resolvemos la suma por la diferencia (diferencia de cuadrados) en el denominador.

$$\frac{2\sqrt{\mathrm{a}}+3\sqrt{\mathrm{b}}}{2\mathrm{a}-3\mathrm{b}+\sqrt{ab}} \cdot \frac{(2\sqrt{\mathrm{a}}-3\sqrt{\mathrm{b}})}{(2\sqrt{\mathrm{a}}-3\sqrt{\mathrm{b}})} = \frac{(2\sqrt{\mathrm{a}})^2-(3\sqrt{\mathrm{b}})^2}{4a\sqrt{a}-6b\sqrt{a}+2a\sqrt{b}-6a\sqrt{b}+9b\sqrt{b}-3b\sqrt{a}}$$

$$\frac{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{2a-3b+\sqrt{ab}}\cdot\frac{(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})}{(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})}=\frac{4a-9b}{4a\sqrt{a}-4a\sqrt{b}-9b\sqrt{a}+9b\sqrt{b}}$$

$$=\frac{4a-9b}{4a\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})-9b\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$=\frac{\cancel{(4a-9b)}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot\cancel{(4a-9b)}}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

10.2 Racionalización de denominadores.

Ejemplo 29: Racionalización de denominadores

a. $\frac{3x-4y-\sqrt{xy}}{3\sqrt{x}-4\sqrt{y}}$, Multiplicamos el numerador y el denominador por la conjugada del denominador.

$\frac{3x-4y-\sqrt{xy}}{3\sqrt{x}-4\sqrt{y}}\cdot\frac{(3\sqrt{x}+4\sqrt{y})}{(3\sqrt{x}+4\sqrt{y})}$, aplicamos propiedad distributiva en el numerador y resolvemos la suma por la diferencia (diferencia de cuadrados) en el denominador.

$$\frac{3x-4y-\sqrt{xy}}{3\sqrt{x}-4\sqrt{y}}\cdot\frac{(3\sqrt{x}+4\sqrt{y})}{(3\sqrt{x}+4\sqrt{y})}=\frac{9x\sqrt{x}-12y\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+12x\sqrt{y}-16y\sqrt{y}-4y\sqrt{x}}{(3\sqrt{x})^2-(4\sqrt{y})^2}$$

Ahora sumamos términos semejantes en el numerador y resolvemos el denominador.

$\frac{3x-4y-\sqrt{xy}}{3\sqrt{x}-4\sqrt{y}}\cdot\frac{(3\sqrt{x}+4\sqrt{y})}{(3\sqrt{x}+4\sqrt{y})}=\frac{9x\sqrt{x}+9x\sqrt{y}-16y\sqrt{x}-16y\sqrt{y}}{(9x-16y)}$, buscamos factor común en el numerador.

$$\frac{3x-4y-\sqrt{xy}}{3\sqrt{x}-4\sqrt{y}}\cdot\frac{(3\sqrt{x}+4\sqrt{y})}{(3\sqrt{x}+4\sqrt{y})}=\frac{9x\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})-16y\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(9x-16y)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot\cancel{(9x-16y)}}{\cancel{(9x-16y)}}$$

$$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

b. $\frac{(a^4-2)}{\sqrt{(a^4-1)}-1}$, Multiplicamos el numerador y el denominador por la conjugada del denominador.

$\frac{(a^4-2)}{\sqrt{(a^4-1)}-1}\cdot\frac{\sqrt{(a^4-1)}+1}{\sqrt{(a^4-1)}+1}$, Multiplicamos numeradores y denominadores entre sí.

$$\frac{(a^4-2)}{\sqrt{(a^4-1)}-1}\cdot\frac{\sqrt{(a^4-1)}+1}{\sqrt{(a^4-1)}+1}=\frac{(a^4-2)\cdot\left(\sqrt{(a^4-1)}+1\right)}{\left(\sqrt{(a^4-1)}\right)^2-(1)^2}$$

$\frac{(a^4-2)}{\sqrt{(a^4-1)}-1}\cdot\frac{\sqrt{(a^4-1)}+1}{\sqrt{(a^4-1)}+1}=\frac{(a^4-2)\cdot\left(\sqrt{(a^4-1)}+1\right)}{a^4-1-1}$, simplificamos

$$\frac{(a^4-2)}{\sqrt{(a^4-1)}-1}\cdot\frac{\sqrt{(a^4-1)}+1}{\sqrt{(a^4-1)}+1}=\frac{\cancel{(a^4-2)}\cdot\left(\sqrt{(a^4-1)}+1\right)}{\cancel{a^4-2}}$$

$$=\left(\sqrt{(a^4-1)}+1\right)$$

Visita la escena interactiva "Racionalización", en la cual encontrarás teoría y ejercicios de racionalización de denominadores, escena adaptada de (Matematicaula, 2019a).

Con base en lo estudiado y guiándose con los ejemplos 28 y 29, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado y simplificar, si es posible			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$	$\frac{2(x-4)}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)}$	2. $\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$	$\frac{x-2}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x-1}+1)}$

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado y simplificar, si es posible			
3. $\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$	4. $\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$	$\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}$
5. $\frac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$	$\frac{\sqrt[4]{y}}{y}$	6. $\frac{1}{c^{3/7}}$	$\frac{c^{4/7}}{c}$
7. $\frac{3x-4y-\sqrt{xy}}{3\sqrt{x}-4\sqrt{y}}$	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	8. $\frac{(a^4-2)}{\sqrt{(a^4-1)}-1}$	$\sqrt{(a^4-1)}+1$
9. $\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	10. $\sqrt{\frac{2}{x}}$	$\frac{\sqrt{2x}}{x}$
11. $\frac{y(\sqrt{3}-\sqrt{y})}{3-y}$	$\frac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$	12. $\frac{\sqrt{x}+9}{1}$	$\frac{x-81}{\sqrt{x}-9}$
13. $\frac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$	$\frac{4-x}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}$	14. $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$	$\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}$
15. $\frac{\sqrt{x+1}}{1}$	$\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$	16. $\frac{\sqrt{x+2}+2}{1}$	$\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$
17. $\frac{(x^2-2)}{\sqrt{(x^2-1)}-1}$	$\sqrt{(x^2-1)}+1$	18. $\frac{2a-3b+\sqrt{ab}}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$
19. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$	20. $\frac{1}{y^{2/5}}$	$\frac{y^{3/5}}{y}$

SEMANA 8

11 ECUACIÓN LINEAL

La ecuación más básica en álgebra es la *ecuación lineal* y se define como $mx+b=0$, donde $m \neq 0$, luego, si

$$mx+b=0, \qquad entonces\ x=-\frac{b}{m}$$

Ejemplo 30: Resolver las siguientes ecuaciones lineales

a. $6x - 7 = 2x + 5$
Recordemos que: Todo lo que este a un lado de la igualdad, siempre pasa al otro lado con su operación inversa, esto es, si este sumando pasa a restar y si está multiplicando pasa a dividir y viceversa.

Luego:
$6x - 2x = 5 + 7$, se puede observar el cambio de operación (signo)

$4x = 12.$

Ahora, el 4 está multiplicando a la "*x*", por lo que pasas al lado contrario a dividir; esto es:

$$x = \frac{12}{4} = 3$$

b. $(8x - 2) \cdot (3x + 4) = (4x + 3) \cdot (6x - 1)$
Aplicamos propiedad distributiva en ambos lados la igualdad.

$$24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 + 14x - 3$$

$$\cancel{24x^2} + 26x - 8 = \cancel{24x^2} + 14x - 3$$

$$26x - 14x = -3 + 8$$

$$12x = 5$$

$$x = \frac{5}{12}$$

12 ECUACIÓN CUADRÁTICA

Son ecuaciones polinomiales de segundo grado, que puede escribirse en su forma estándar de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad con\ a \neq 0$$

Muchos problemas sobre objetos en movimiento, implican ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 31: Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas

a. Se lanza un globo de agua con una velocidad inicial de $48\,{}^{pies}/_{s}$, directamente hacia abajo desde una ventana ubicada a $64\ pies$ del suelo, la altura *s* (en pies) del suelo, después de *t* segundos está dada por

$s = 16t^2 - 48t - 64$.

Hallar el tiempo transcurrido para que el globo llegue el suelo.

Dado que el globo llega al suelo, su altura será $s = 0$, por lo tanto, la ecuación quedará

$$0 = 16t^2 - 48t - 64$$

Como podemos observar la ecuación resultante es divisible por 16 y quedaría

$$\frac{16t^2}{16} - \frac{48t}{16} - \frac{64}{16} = t^s - 3t - 4 = 0$$

Tomando $t^2 - 3t - 4 = 0$, podemos factorizar el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0,\ con\ a \neq 0$ para hallar los posibles valores de t

$$(t - 4) \cdot (t + 1) = 0$$

Ahora: $(t - 4) = 0$, luego $t = 4$. El valor de t para el factor $(t + 1)$ no se tiene en cuenta por ser negativo.

R/. El globo tarda 4 segundos para llegar al suelo.

Si una ecuación cuadrática tiene la forma especial $x^2 = d,\ con\ d \geq 0$, lo podemos resolver igualando a cero, esto es $x^2 - d = 0$. Se puede observar que es una diferencia de cuadrados y se resuelve como el producto de la suma por la diferencia de sus raíces cuadrados

$$(x + \sqrt{d}) \cdot (x - \sqrt{d}) = 0$$

Esto indica que tiene dos soluciones $x = \sqrt{d}$ o $x = -\sqrt{d}$.

También se pude resolver sacando raíz cuadrada a cada uno de los términos de la ecuación, teniendo en cuenta que cuando se trata de raíz cuadrada se tienen dos soluciones, una con valores positivos y otra con valores negativos.

Esto es, $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{d}$, luego $x = \pm\sqrt{d}$ que coincide con la respuesta anterior.

b. $2x^2 = 6$

Despejamos la *x*, $x^2 = \frac{6}{2} = 3$; luego $x = \pm\sqrt{3}$.

El conjunto solución es $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

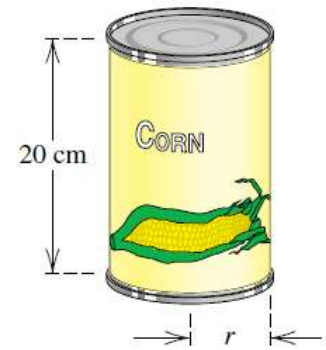
c. $(y - 3)^2 = 5$

Despejando la y, quedaría:

$$\sqrt{(y-3)^2} = \pm\sqrt{5}$$
$$y - 3 = \pm\sqrt{5}$$
$$y = 3 \pm \sqrt{5}$$

El conjunto solución es $\{3-5, 3+\sqrt{5}\}$

d. Un fabricante de latas desea construir una lata cilíndrica circular recta de altura 20 centímetros y capacidad 3000 cm3 (vea la figura). Encuentre el radio interior r de la lata.



El volumen *V* del cilindro es

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Sabemos que:

$$V = 3000\ cm^3, \qquad h = 20\ cm$$

Despejamos *r* y reemplazamos

$$r^2 = \frac{V}{\pi \cdot h}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{3000}{20 \cdot \pi}}$$

$$r = \sqrt{\frac{150}{\pi}} \approx 6.91\ cms$$

Se toma sólo el valor positivo, ya que el radio no puede ser negativo.

e. Hallar los posibles valores de *x* para la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

Para obtener los posibles valores de *x*, debemos utilizar el método de completar cuadrados, que vimos anteriormente.

Procedimiento

✓ Como se trata de despejar la *x*, empezaremos por dividir toda la ecuación por *a*

$$\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \longrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

✓ Pasamos el término $\frac{c}{a}$ al loado derecho de la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- ✓ Completamos el cuadrado perfecto en los dos términos de la derecha, sabiendo que el término de la mitad es $\frac{b}{a}x$. Para ello sacamos la raíz cuadrada de $\sqrt{x^2} = x$
- ✓ Sabemos que $2 \cdot (x) = \frac{b}{a}$, luego el tercer término será $x = \frac{b}{2a}$
- ✓ Completamos el cuadrado

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}$$

Se resta el término $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ para que la ecuación no se afecte, observemos que, si se resuelve la ecuación anterior se conserva la ecuación inicial (sólo a manera de prueba)

Recuerden que para solucionar el cuadrado de un binomio se debe proceder de la siguiente forma:

$$(a \pm b)^2 = (a)^2 \pm 2(a) \cdot (b) + (b)^2$$

Para el ejercicio que estamos resolviendo, esto sería:

$$(x)^2 + 2 \cdot (x) \cdot \left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} \longrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Se puede observar que la ecuación no se altera y que $2 \cdot (x) \cdot \left(\frac{b}{2a}\right) = \frac{b}{a}x$

- ✓ Luego de completar el cuadrado, pasamos el término $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a la derecha

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

- ✓ Hacemos la suma en los términos de la derecha, donde el M.C.D es $4a^2$, quedando así:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- ✓ Sacamos raíz cuadrada a cada lado de la ecuación

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

- ✓ Aplicamos propiedades de los radicales

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- ✓ Despejamos la *x*

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- ✓ Hacemos una suma de fraccionarios de igual denominador y se obtiene la fórmula de la ecuación cuadrática

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad con\ a \neq 0$$

Como se dijo anteriormente la ecuación cuadrática sirve para solucionar muchos problemas sobre objetos en movimiento y hallar factores (factorizaciones) que no tienen soluciones en los enteros

f. Resuelve $3x^2 - 2x - 4 = 0$

Si intentas resolver la ecuación como un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, podrás observar que no es fácil encontrar la solución por factorización directa, lo que implica que se tiene que hacer uso de la ecuación cuadrática.

$$3x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si comparamos los términos, $a = 3,\ b = -2\ y\ c = -4$, ahora podemos reemplazar em la ecuación cuadrática

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad con\ a \neq 0$$

$$x = -\frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot(3)\cdot(-4)}}{2\cdot(3)}, \quad con\ a \neq 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+48}}{2 \cdot (3)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2 \cdot (3)}$$

Ahora descomponemos el 52 en sus factores primos

52	2
26	2
13	

$$52 = 2^2 \cdot 13$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 \cdot 13}}{2 \cdot (3)}$$

Podemos sacar el 2 de la raíz

$$x = \frac{\cancel{2} \pm \cancel{2} \cdot \sqrt{13}}{\cancel{2} \cdot (3)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{13}}{3}$$

Entonces, las rices son

$$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3} \ y \ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}$$

12.1 DISCRIMINANTE, DEFINICIÓN DE IMAGINARIOS Y OPERACIONES CON COMPLEJOS

12.1.1 Discriminante

El término $b^2 - 4ac$ de la ecuación cuadrática se conoce como el discriminante y es el que determina las posibles soluciones de la ecuación cuadrática

Discriminante de la ecuación cuadrática $b^2 - 4ac$	Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene 2 (dos) soluciones en los reales.	
	Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene 1 (una) solución en los reales.	
	Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación NO tiene solución en los reales, tiene solución en los complejos.	

Ejemplo 32: Solución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general

a. Resuelva $9x^2 + 16 = 24x$, se debe igualar a cero

$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$a = 9, \qquad b = -24 \ \ y \ c = 16$$

Reemplazamos en la ecuación cuadrática

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad con\ a \neq 0$$

$$x = -\frac{-24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot (9) \cdot (16)}}{2 \cdot (9)}, \quad con\ a \neq 0$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot (9) \cdot (16)}}{2 \cdot (9)}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{2 \cdot (9)}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (9)}$$

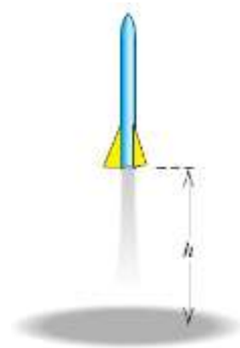
$$x = \frac{24}{2 \cdot (9)} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

|

b. Un cohete de juguete se lanza verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo, como se ilustra en la figura. Si su velocidad inicial es 120 pies/s y la única fuerza que actúa sobre él es la gravedad, entonces la altura h del cohete (en pies) sobre el suelo después de t segundos está dada por

$$h = -16t^2 + 120t$$

¿Cuánto tiempo demora el cohete en obtener una altura de 200 pies?



Llevamos la ecuación a la forma $ax^2 + bx + c = 0$, esto es:

$16t^2 - 120t + h = 0$, pero sabemos que la altura que obtendrá en un tiempo t, será de 200 pies, luego:

$$16t^2 - 120t + 200 = 0$$

Utilizamos la fórmula de la ecuación cuadrática $x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad con\ a \neq 0$ y reemplazamos.

$$t = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde:

$$a = 16, \qquad b = -120 \;\; y\ c = 200$$

$$t = -\frac{-120 \pm \sqrt{(-120)^2 - 4 \cdot (16) \cdot (200)}}{2 \cdot (16)}$$

$$t = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 12800}}{2 \cdot (16)}$$

$$t = \frac{120 \pm \sqrt{1600}}{2 \cdot (16)}$$

$$t = \frac{120 \pm 40}{2 \cdot (16)} = \frac{60 \pm 20}{16} = \frac{15 \pm 5}{4}$$

$$t = \frac{15 \pm 5}{4}$$

Por lo tanto, el cohete está a 200 pies sobre el suelo en los tiempos siguientes: $2.5\ segundos\ \ y\ 5\ segundos$

Las dos respuestas obedecen a que a los $2.5\, segundos$ el cohete va subiendo y por efectos de la gravedad asciende a su altura máxima y empieza a descender y a los $5\, segundos$ pasa nuevamente para la altura de 200 pies.

c. Resuelva la ecuación cuadrática $\frac{3}{2}z^2 - 4z - 1 = 0$

$$a = {}^{3}\!/_{2}, \qquad b = -4 \;\; y\, c = -1$$

$$z = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = -\frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot \left({}^{3}\!/_{2}\right) \cdot (-1)}}{2 \cdot \left({}^{3}\!/_{2}\right)}$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 6}}{3}$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{22}}{3}$$

$$z = \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{22}}{3}$$

Entonces, las rices son

$$\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{22}}{3} \;\; y \;\; \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{22}}{3}$$

12.1.2 Números Imaginarios

Son aquellas raíces que no tienen solución en los reales, es decir que el discriminante es menor que cero.

Discriminante de la ecuación cuadrática $b^2 - 4ac$	Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación NO tiene solución en los reales, tiene solución en los complejos.

Se denota por *i* y tiene la siguiente propiedad

Propiedad de i	$i = \sqrt{-1}$, por lo que $(i)^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2$ $i^2 = -1$

Ejemplo 33: Números imaginarios

a. $\sqrt{-12}$, como se puede observar es la raíz cuadrada de un número negativo, por lo tanto, sólo se puede descomponer el 12 en sus factores primos.

$$\sqrt{-12} = \sqrt{(-1)\cdot(2)^2\cdot(3)} \qquad \sqrt{-12} = \left(\sqrt{(2)^2}\right)\cdot\left(\sqrt{(3)}\right)\cdot\left(\sqrt{(-1)}\right)$$

$$\sqrt{-12} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} \qquad \sqrt{-12} = 2\sqrt{3}i$$

b. $\sqrt{-9}$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{(3)^2\cdot(-1)} \qquad \sqrt{-9} = \sqrt{(3)^2}\cdot\sqrt{(-1)}$$

$$\sqrt{-9} = 3\cdot\sqrt{-1} \qquad \sqrt{-9} = 3i$$

c. $\sqrt{{-3}/{4}}$

$$\sqrt{{-3}/{4}} = {\sqrt{-3}}/{\sqrt{4}} \qquad \sqrt{{-3}/{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

12.1.3 Números complejos

Son aquellos que están formados por una parte real y una parte imaginaria, por lo regular la parte real se separa de la imaginaria y va siempre a la izquierda. Esto es, un número complejo se define como $a + bi$, donde *a* y *b* son reales e *i* es la parte imaginaria.

Ejemplo 34: Propiedades de los complejos

Terminología	Definición	Ejemplo
Número complejo	$a + bi$, donde a y b son números reales e $i^2 = -1$	$3 + i\,, \quad 5i$
Número imaginario	$a + bi \quad con\ b \neq 0$	$3i + 2i\,, \quad -5i$

Número imaginario puro	$bi \quad con\ b \neq 0$	$-3i, \quad \sqrt{5}i, \quad i$
Igualdad	$a + bi = x + di$ si y sólo si *a*=*c* y *b*=*d*	$x + yi = 3 + 4i$ sí y sólo si $x = 3$ y $y = 4$

12.1.4 Operaciones con complejos

Se aplican las propiedades de los (distributiva, asociativa, etc), teniendo presente la parte imaginaria.

Visita la escena interactiva de la página 216 "Suma y resta de complejos" del del libro interactivo de aprendizaje "Matemáticas Operativas" , en la cual se explica la forma como se realizan las operaciones de suma y resta de números complejos.

Ejemplo 35: Operaciones con complejos

Sea $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$, $z_3 = {}^3/_2$ y $z_4 = 7i$

Hallar:

a. Adición:

- $\boldsymbol{z_1 + z_2}$

$z_1 + z_2 = (-3 + 4i) + (5 - 2i)$ Eliminamos los paréntesis, teniendo en cuenta los cambios de signo si es el caso

$z_1 + z_2 = -3 + 4i + 5 - 2i$ Sumamos los términos semejantes, teniendo en cuenta que la parte real va a la izquierda.

$z_1 + z_2 = 2 + 2i$

- $\boldsymbol{z_1 + z_2} + z_4$

$z_1 + z_2 + z_4 = (-3 + 4i) + (5 - 2i) + (7i)$ Eliminamos los paréntesis

$z_1 + z_2 + z_4 = -3 + 4i + 5 - 2i + 7i$ Sumamos los términos semejantes

$z_1 + z_2 + z_4 = 2 + 9i$

b. Sustracción:

- $\boldsymbol{z_1 - z_2}$

$z_1 - z_2 = (-3 + 4i) - (5 - 2i)$ Eliminamos los paréntesis, teniendo en cuenta los cambios de signo

$z_1 - z_2 = -3 + 4i - 5 + 2i$ Sumamos los términos semejantes

$z_1 - z_2 = -8 + 6i$

- $\boldsymbol{z_1 - z_3}$

$z_1 - z_3 = (-3 + 4i) - \left({}^{3}/_{2}\right)$ Se hace la suma de fraccionarios

$$z_1 - z_3 = \frac{(-3 + 4i)}{1} - \frac{3}{2}$$

$z_1 - z_3 = \frac{2\cdot(-3+4i)-(1)\cdot(3)}{(1)\cdot(2)}$ Aplicamos la propiedad distributiva

$$z_1 - z_3 = \frac{-6 + 8i - 3}{2} \qquad z_1 - z_3 = \frac{-9 + 8i}{2}$$

Separamos la parte real de la imaginaria y simplificamos

$$z_1 - z_3 = \frac{-9}{2} + \frac{8i}{2} \qquad z_1 - z_3 = \frac{-9}{2} + 4i$$

Visita la escena interactiva de la página 217 “Producto y cociente” del del libro interactivo de aprendizaje “Matemáticas Operativas” , en la cual se explica la forma como se realizan las operaciones de producto de números complejos.

c. Producto:
   - $\boldsymbol{z_1 \cdot z_4 + z_3 \cdot z_4}$

$z_1 \cdot z_4 + z_3 - z_4 = (-3 + 4i) \cdot (7i) + \left({}^{3}/_{2}\right) \cdot (7i)$ Realizamos las operaciones

$$z_1 \cdot z_4 + z_3 - z_4 = \frac{-21i + 28i^2}{1} + \frac{21i}{2}$$

$$z_1 \cdot z_4 + z_3 - z_4 = \frac{2 \cdot (-21i + 28i) + (1) \cdot (21i)}{2}$$

$$z_1 \cdot z_4 + z_3 - z_4 = \frac{2 \cdot (-21i + 28i^2) + (1) \cdot (21i)}{2}$$

$$z_1 \cdot z_4 + z_3 - z_4 = \frac{-42i + 56i^2 + 21i}{2}$$

Recordemos que $i^2 = -1$ y reemplazamos

$$z_1 \cdot z_4 + z_3 - z_4 = \frac{-42i + 56(-1) + 21i}{2}$$

$$z_1 \cdot z_4 + z_3 - z_4 = \frac{-21i - 56}{2}$$

$$z_1 \cdot z_4 + z_3 - z_4 = -\frac{56}{2} - \frac{21i}{2}$$

$$z_1 \cdot z_4 + z_3 - z_4 = -28 - \frac{21i}{2}$$

- $\boldsymbol{(z_1 \cdot z_2) - (z_3 \cdot z_4)}$

$(z_1 \cdot z_2) - (z_3 \cdot z_4) = [(-3 + 4i) \cdot (5 - 2i)] - \left[\left(3/2\right) \cdot (7i)\right]$ Aplicamos propiedad distributiva

$$(z_1 \cdot z_2) - (z_3 \cdot z_4) = \left[\frac{-15 + 6i + 20i - 8i^2}{1}\right] - \left[\frac{21i}{2}\right]$$

$$(z_1 \cdot z_2) - (z_3 \cdot z_4) = \frac{2 \cdot (-15 + 26i - 8i^2) - (1) \cdot (21i)}{2}$$

$$(z_1 \cdot z_2) - (z_3 \cdot z_4) = \frac{-30 + 52i - 16i^2 - 21i}{2}$$

Reemplazamos i^2 por -1

$$(z_1 \cdot z_2) - (z_3 \cdot z_4) = \frac{-30 + 52i - 16(-1) - 21i}{2}$$

$$(z_1 \cdot z_2) - (z_3 \cdot z_4) = \frac{-14 + 31i}{2}$$

$$(z_1 \cdot z_2) - (z_3 \cdot z_4) = -\frac{14}{2} + \frac{31i}{2}$$

$$(z_1 \cdot z_2) - (z_3 \cdot z_4) = -7 + \frac{31i}{2}$$

Visita la escena interactiva de la página 218 "Producto" y 223 "Cociente" del del libro interactivo de aprendizaje "Matemáticas Operativas" , en la cual se explica la forma como se realizan las operaciones de cociente (división) de números complejos.

d. División:

- $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-3 + 4i)}{(5 - 2i)}$$

Se debe racionalizar el denominador, para lo cual es necesario multiplicar el numerador y el denominador por la conjugada del denominador.

La conjugada de un número complejo se denota como $\overline{Z_2}$ y basta con cambiar el signo a la parte compleja, es decir, la que tiene la parte real y la imaginaria o el imaginario puro *i.* Siendo así, quedaría:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-3+4i)}{(5-2i)} \cdot \frac{(5+2i)}{(5+2i)}$$

Observemos que en el denominador quedo el producto de la suma por la diferencia

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-15-6i+20i+8i^2}{25-4i^2} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{-15+14i+8i^2}{25-4i^2}$$

Reemplazamos i^2 por -1

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-15+14i+8(-1)}{25-4(-1)} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{-23+14i}{29}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{23}{29} + \frac{14i}{29}$$

- $\boldsymbol{\frac{z_3}{z_4}}$

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{3/2}{7i}$$

Realizamos la operación de los extremos y los medios

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{3/2}{\frac{7i}{1}} \qquad \frac{z_3}{z_4} = \frac{3}{14i}$$

Multiplicamos numerador y denominador por *i* para eliminar el imaginario del denominador.

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{3}{14i} \cdot \frac{i}{i} \qquad \frac{z_3}{z_4} = \frac{3i}{14i^2}$$

Reemplazamos i^2 por -1

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{3i}{14(-1)} \qquad \frac{z_3}{z_4} = -\frac{3i}{14}$$

Con base en lo estudiado y guiándose con los ejemplos 30 al 35, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado y simplificar, si es posible			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $4x - 5 = 3$	$x = 2$	2. $2x = \frac{1}{2}x - 7$	$x = -\frac{14}{3}$
3. $x - 6 = \frac{1}{3}x$	$x = 9$	4. $7x - 4 = 3x + 8$	$x = 3$
5. $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$	$x = -\frac{3}{4}$	6. $\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}(y - 3) = \frac{y+1}{4}$	$y = \frac{21}{11}$
7. $x^2 + 30x + 200 = 0$	$x = -10$ $x = -20$	8. $\sqrt{6}x^2 + 2x - \sqrt{\frac{3}{2}} = 0$	$x = \frac{\sqrt{6}}{6}, -\sqrt{\frac{3}{2}}$
9. $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$	$x = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$	10. $25x^2 + 70x + 49 = 0$	$x = -\frac{7}{5}$
11. $x^2 + 4x - 1 = 0$	**Discriminante** > 0, tiene dos (2) soluciones en los reales	12. $4x^2 - 12x + 9 = 0$	**Discriminante = 0, tiene una (1) solución en los reales**
13. $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$	**Discriminante < 0, NO tiene solución en los reales. Tiene solucón en los complejos**	14. $25x^2 + 70x + 49 = 0$	**Discriminante = 0, tiene una (1) solución en los reales**
Si Z1=3+5i, Z2=7+3i y Z3=1-2i. Resolver las siguientes operaciones.			
15. $Z_1 + Z_2$	$10 + 8i$	16. $Z_1 - Z_3$	$2 + 7i$
17. $Z_1 \div Z_2$	$\frac{18}{29} + \frac{13}{29}i$	18. $(Z_1 - Z_3)^2$	$-45 + 14i$

|

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado y simplificar, si es posible			
$(Z_2)(Z_3)$	$13 - 11i$	$(Z_2)(Z_3)^{-1}$	$\frac{1}{5} + \frac{17}{5}i$
19. $-2x^2 + 6x + 3 = 0$	$x = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$ $x = -\frac{\sqrt{15}-3}{2}$	20. $w^2 = 3(w-1)$	$w = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}$

SEMANA 9

12.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2x2 y 3x3

12.3 Sistema de ecuaciones lineales 2x2

Son aquellos sistemas que poseen 2 incógnitas

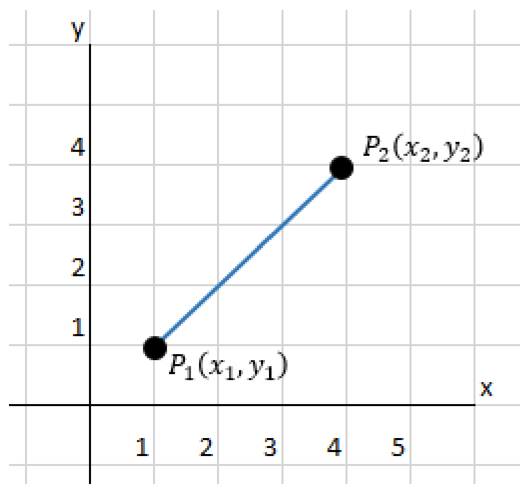
Una ecuación que representa este sistema es la de la línea recta, dada por

$$y = mx + b$$

Donde *m* es la pendiente y *b* el punto donde la recta corta el eje de y.

La pendiente *m* es la razón de cambio en los ejes x e y, por lo que la pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tang\ \theta$$



Ecuación de la recta dados dos puntos: Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la ecuación está determinada por:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación de la recta dados un punto y la pendiente: De la ecuación anterior podemos concluir que:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

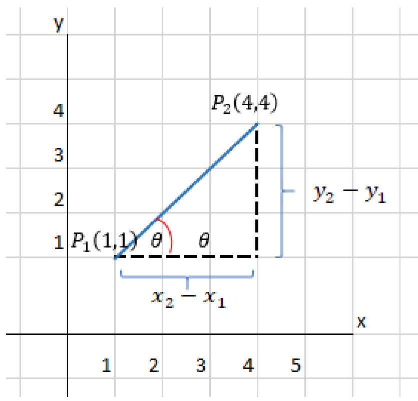
$y = m \cdot (x - x_1) + y_1$,

dado que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tang\ \theta$$

|

Podemos hallar la ecuación de la línea recta que se muestra en la figura



Podemos utilizar la fórmula de la ecuación de la línea recta, dados dos puntos o utilizar la ecuación dados un punto y la pendiente, para lo que tendremos que encontrar la pendiente.

Utilizaremos las dos fórmulas

Dados dos puntos:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{4-1}{4-1}$$

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{3}{3}$$

$$\frac{y-1}{x-1} = 1$$

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$y - 1 = x - 1$$

$$y = x$$

Dados un punto y la pendiente:

$$m = \frac{4-1}{4-1} = tang\ \theta$$

$$m = 1 = tang\ \theta$$

Podríamos calcular el ángulo como

$$\theta = \tan^{-1}(1)$$

$$\theta = 45\ °$$

Ahora, que sabemos que:

$$m = 1$$

Aplicamos la fórmula

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$y - 1 = x - 1$$

$$y = x$$

Rectas paralelas: Dos rectas son paralelas cuando sus pendientes son iguales, esto es: $m_1 = m_2$

Rectas perpendiculares: Dos restas son perpendiculares cuan el producto de sus pendientes es igual a -1, esto es: $m_1 \cdot m_2 = -1$

Para solucionar ecuaciones lineales 2x2 y 3x3, existen varios métodos.

Se puede utilizar cualquiera de ellos o la combinación de uno con otro, dependiendo de cómo se presente el ejercicio y de la forma que se considere más se les facilite.

Ejemplo 36: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones 2x2

$$\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

Métodos de solución de ecuaciones lineales 2x2

12.3.1 Método gráfico

Consiste en representar gráficamente las ecuaciones de las rectas y el punto de intercepción será la solución.

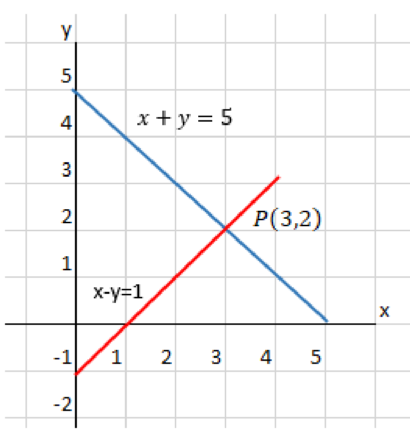
Se debe hacer una tabla de valores en x e y

Para (1)

x	0	1	2	3
y	5	4	3	2

Para (2)

x	0	1	2	3
y	-1	0	1	2



Como se puede observar en las dos tablas coinciden el par ordenado $P(3,2)$, lo que indica que este es el conjunto solución.

Gráficamente esto sería como se muestra en la figura.

En la escena interactiva "Solución de ecuaciones lineales 2x2-Método gráfico", se presenta la posibilidad de que ingreses los coeficientes de las variables (con su signo) y el término independiente para que observes la solución gráficamente.

12.3.2 Por Sustitución

Como su nombre lo indica, se trata de sustituir una variable de una ecuación en la otra.

Pasos para solucionar ecuaciones 2x2 por SUSTISUCIÓN

1. Se despeja una variable en la ecuación (1)
2. Se reemplaza la variable despejada en la ecuación (2)
3. Se realizan las operaciones para encontrar una variable
4. Se reemplaza la variable encontrada en la ecuación (1), despeja

Ejemplo 37: Solución por Sustitución

$$\begin{cases} x + y = 5 \quad (1) \\ x - y = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Sigamos los pasos para buscar la solución

1. Se despeja una variable en la ecuación (1), en este caso despejaremos la x, pero puedes despejar la y si te parece conveniente.
   $x = 5 - y \quad (1)$

2. Se reemplaza la variable despejada en la ecuación,
   $x - y = 1 \quad (2)$
   $(5 - y) - y = 1 \quad (2)$

3. Se realizan las operaciones para encontrar una variable
   $(5 - y) - y = 1$
   $5 - y - y = 1$
   $5 - 2y = 1$
   $-2y = 1 - 5$
   $-2y = -4$
   $2y = 4$
   $y = \frac{4}{2} = 2$
   $y = 2$

4. Se reemplaza la variable encontrada en la ecuación (1), despeja
   $x = 5 - y \quad (1)$
   $x = 5 - (2)$
   $x = 3$

12.3.3 Por Igualación

Como se indica, se trata de igualar variables.

Pasos para solucionar ecuaciones 2x2 por IGUALACIÓN

1. Se despeja una variable (x o y) en la ecuación (1)
2. Se despeja una variable (x o y) en la ecuación (2)
3. Se igualan las variables (x o y) despejadas anteriormente
4. Se realizan las operaciones para encontrar una de las variables
5. Se reemplaza la variable encontrada en la ecuación (1) o (2), despeja

Ejemplo 38: Solución por Igualación

Para el presente ejercicio, despejaremos x, pero pueden despejar y.

1. Se despeja una variable (x o y) en la ecuación (1)
   $x = 5 - y \quad (1)$
2. Se despeja una variable (x o y) en la ecuación (2)
   $x = 1 + y \quad (2)$
3. Se igualan las variables (x o y) despejadas anteriormente
   $5 - y = 1 + y$
4. Se realizan las operaciones para encontrar una de las variables
   $2y = 4$
   $y = 2$
5. Se reemplaza la variable encontrada en la ecuación (1) o (2), despeja

   $x = 5 - y \quad (1)$
   $x = 5 - 2$
   $x = 3$

12.3.4 Por reducción o eliminación

Se busca eliminar una de las variables, para ello es posible multiplica la ecuación (1) por un valor que haga las variables que se desea eliminar igual a la (2)

Ejemplo 39: Solución por reducción o eliminación

$$\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} x + \cancel{y} = 5 \quad (1) \\ \underline{x - \cancel{y} = 1 \quad (2)} \end{array}$$ Se suman términos semejantes

$2x \quad = 6$

Despejamos la x

$x \quad = 3$

Como ya se tiene el valor de x, podemos reemplazar en la ecuación (1) o (2)

$x + y = 5$

$3 + y = 5$

$y = 5 - 3$

$y = 2$

Pero también se puede eliminar la x, y en este caso multiplicamos la ecuación (2) po2 -1

$$\begin{array}{l} x + y = 5 \quad (1) \\ x - y = 1 \quad (2) \end{array} \qquad \begin{array}{c} x + y = 5 \quad (1) \\ (-1)\cdot(x - y) = (-1)\cdot 1 \quad (2) \end{array} \qquad \begin{array}{c} x + y = \cancel{5} \quad (1) \\ \underline{-x + y = \cancel{-1} \quad (2)} \\ 2y \quad = 4 \end{array}$$

$y = 2$

Visita la escena interactiva de la página 255 del libro interactivo "[Matemáticas Operativas]", en la cual podrás recordar lo visto hasta el momento sobre solución de ecuaciones lineales 2x2 por los métodos de sustitución, igualación y reducción.

12.3.5 Por Cramer o determinantes

Se resuelve por determinantes, de la siguiente forma

Pasos para solucionar ecuaciones 2x2 por CRAMER

1. Se halla el determinante del sistema D_s
2. Se halla determinante de x, D_x
3. Se encuentra $x = \frac{D_x}{D_s}$
4. Se halla determinante de y, D_y
5. Se encuentra y= $\frac{D_y}{D_s}$

1. Se halla el determinante del sistema D_s

$C_x \quad C_y$

$$D_S \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = (\quad) - (\quad)$$

Donde: $C_x = Coeficiente\ de\ x$

$C_y = Coeficiente\ de\ y$

Ejemplo 40: Solución por Cramer o determinantes

$$\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

Se multiplican las diagonales principales y se ubican en el primer paréntesis
Se multiplican las diagonales secundarias y se ubican en el segundo paréntesis

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) - (1)$$

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) - (1)$$

$$D_s = -2$$

2. Se halla determinante de *x*, D_x

$$\begin{array}{c} \quad T_I \quad C_y \\ D_x \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = (\quad) - (\quad) \end{array}$$

Donde: $T_I = Término\ Independiente$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5) - (1)$$

$$D_x = -6$$

Observen que al hallar D_x, en el determinante se reemplaza C_x por el término independiente T_I

En este momento podemos encontrar el valor de *x*

3. Se encuentra $x = \frac{D_x}{D_s}$

$$x = \frac{D_x}{D_s} = \frac{-6}{-2}$$
$$x = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = 3$$

Se puede reemplazar este valor en la ecuación (1) o (2) para encontrar el valor de "y", pero haremos el procedimiento por determinantes con el ánimo de practicar.

4. Se halla determinante de y, D_y

$$\begin{array}{cc} & C_x \quad T_I \\ D_y & \left| \begin{matrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{matrix} \right| = (\qquad) - (\qquad) \end{array}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1) - (5)$$
$$D_y = -4$$

En este momento podemos encontrar el valor de *y*

5. Se encuentra $y = \frac{D_y}{D_s}$

$$y = \frac{D_y}{D_s} = \frac{-4}{-2}$$
$$y = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = 2$$

En la escena interactiva "Solución de ecuaciones lineales 2x2-Determinantes", se presenta la posibilidad de que aprendas a solucionar ecuaciones lineales 2x2 por determinantes, ingresando correctamente los coeficientes de las variables (con su signo) en las matrices, para que cambies las "x" por vistos buenos en la medida que aciertes con los datos ingresados.

12.4 Sistema de ecuaciones lineales 3x3

Se utilizan los mismos métodos utilizados para resolver ecuaciones 2x2, pero no se recomienda el gráfico, por ser en tres dimensiones (tres variables)

Para explicar los métodos de solución de ecuaciones 3x3, plantearemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 41: Hay un número de tres cifras que suman 15. El número de centenas más el de unidades, es el doble de las decenas y el numero original más 594, invierte las cifras del número.

Solución.

Lo primero que se debe hacer es plantear las ecuaciones

100	10	1	Como no sabemos los valores que pueden tomar los números, los llamaremos:
C	D	U	$x = Centenas$
x	y	z	$y = Decenas$ $z = Unidades$

$x + y + z = 15$ (1), Los tres números suman 15

$x + z = 2y$ (2), El número de las centenas más las unidades es el doble de las decenas

$100x + 10y + z + 594 = x + 10y + 100z$ (3), el numero original más 594, invierte las cifras del número.

$$99x - 99z = -594 \quad (3)$$

Como se puede observar, todo es divisible por 99

$$\frac{99x}{99} - \frac{99z}{99} = -\frac{594}{99} \quad (3)$$

$$x - z = -6 \quad (3)$$

Ahora organizamos las ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 15 & (1) \\ x - 2y + z = \ 0 & (2) \\ x - z = -6 & (3) \end{cases}$$

12.4.1 Por Sustitución

Como su nombre lo indica, se trata de sustituir una variable de una ecuación en la otra.

Pasos generales para solucionar ecuaciones 3x3 por SUSTISUCIÓN

1. Se despeja una variable en la ecuación (1), lo haremos con x
2. Se reemplaza la variable despejada en la ecuación (2), se realizan las operaciones

3. Se obtiene la ecuación (4) de dos variables
4. Se reemplaza la variable despejada en la ecuación (3), se realizan las operaciones
5. Se obtiene la ecuación (5) de dos variables
6. Se despeja una variable en la ecuación (4),
7. Se reemplaza en la ecuación (5)
8. Se realizan las operaciones para encontrar una variable
9. Se reemplaza la variable en la ecuación (4), para obtener otra variable
10. Se reemplazan las variables encontradas en la ecuación (1), (2) o (3) para obtener la otra variable

Para el ejercicio que nos ocupa, como se trata de convertir las ecuaciones 3x3 en 2x2 y la tercera ya la tenemos en 2x2, entonces despejaremos la *x* en la uno.

Sigamos los pasos

1. Se despeja una variable en la ecuación (1), lo haremos con *x*
   $x+y+z=15$
   $x=15-y-z$
2. Se reemplaza la variable despejada en la ecuación (2), se realizan las operaciones
   $x-2y+z=\ 0$
   $(15-y-z)-2y+z=\ 0$
   $-3y=-15$
   $3y=15$
   $y=\frac{15}{3}$
   $y=5$

Como ya se obtuvo una variable, obviamos los pasos 3 a 5 y se reemplaza el valor encontrado en la ecuación (2).

$$x-2y+z=\ 0 \quad (2)$$

$$x-2(5)+z=\ 0 \quad (2)$$

$$x-2(5)+z=\ 0 \quad (4)$$

$$x+z=\ 10 \quad (4)$$

En este momento ya tenemos las ecuaciones (3) y (4) en dos variables

$$\begin{cases} x - z = -6 & (3) \\ x + z = \ 10 & (4) \end{cases}$$

6. Se despeja una variable en la ecuación (4)

$$x + z = \ 10 \quad (4)$$

$$x = \ 10 - z$$

7. Se reemplaza en la ecuación (5), que en este caso es la misma ecuación (3), porque el planteamiento del problema la presento en 2x2

$$x - z = -1 \quad (3)$$
$$10 - z - z = -6$$
$$10 - 2z = -6$$
$$2z = 10 + 6$$
$$2z = 16$$
$$z = 8$$

10. Se reemplazan las variables encontradas en la ecuación (1), (2) o (3) para obtener la otra variable. En este caso en la ecuación (1)

$$x + y + z = 15$$
$$x + (5) + (8) = 15$$
$$x + 13 = 15$$
$$x = 15 - 13$$
$$x = 2$$

En resumen: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 8 \end{cases}$

R/. El número es 258

12.4.2 Por Igualación

Como su nombre lo indica, se trata de igualar una variable de una ecuación en la otra.

Pasos generales para solucionar ecuaciones 3x3 por IGUALACIÓN

1. Se despeja la misma variable en las tres ecuaciones, lo haremos con *x*
2. Se iguala la variable despejada en la ecuación (1), con la misma variable que se despejo en la ecuación (2) y se obtiene la ecuación (4) de dos variables
3. Se iguala la variable despejada en la ecuación (2), con la misma variable que se despejo en la ecuación (3) y se obtiene la ecuación (5) de dos variables

4. Se despeja una variable en la ecuación (4),
5. Se despeja la misma variable en la ecuación (5) y se igualan
6. Se realizan las operaciones para encontrar una variable
7. Se reemplaza la variable en la ecuación (4), para obtener otra variable
8. Se reemplazan las variables encontradas en la ecuación (1), (2) o (3) para obtener la otra variable

De acuerdo a como se plantean las ecuaciones, se realizan todos o algunos de los pasos planteados.

1. Se despeja la misma variable en las tres ecuaciones, lo haremos con x
$$\begin{cases} x = 15 - y - z & (1) \\ x = 2y - z & (2) \\ x = -6 + z & (3) \end{cases}$$
2. Se iguala la variable despejada en la ecuación (1), con la misma variable que se despejo en la ecuación (2) y se obtiene la ecuación (4) de dos variables $15 - y - z = 2y - z$
$$3y = 15$$
$$y = 5 \quad (4)$$
3. Se iguala la variable despejada en la ecuación (2), con la misma variable que se despejo en la ecuación (3) , y se obtiene la ecuación (5) de dos variables
$$15 - y - z = -6 + z$$
$$y + 2z = 21 \quad (5)$$
4. Se despeja una variable en la ecuación (4),
$$y = 5 \quad (4)$$
5. Se despeja la misma variable en la ecuación (5) y se igualan
$$y = 21 - 2z \quad (5)$$
$$5 = 21 - 2z$$
$$2z = 16$$
$$z = 8$$
6. Se realizan las operaciones para encontrar una variable, ya se encontró
$$\begin{cases} y = 5 \\ z = 8 \end{cases}$$
7. Se reemplaza la variable en la ecuación (4), para obtener otra variable. No se realiza, dado que ya se encontraron dos variables.
8. Se reemplazan las variables encontradas en la ecuación (1), (2) o (3) para obtener la otra variable.

$$x + (5) + (8) = 15$$
$$x = 15 - 13$$
$$x = 2$$

12.4.3 Por reducción o eliminación

Se busca eliminar una de las variables, para ello es posible multiplica la ecuación (1) por un valor que haga las variables que se desea eliminar igual a la (2)

Pasos generales para solucionar ecuaciones 3x3 por REDUCCIÓN

1. Se elimina una variable en las ecuaciones $(1)\ y\ (2)$ y se obtiene la ecuación (4) en dos variables
2. Se elimina una variable en las ecuaciones $(1)\ y\ (3)$ y se obtiene la ecuación (5) en dos variables
3. Se elimina una variable en las ecuaciones $(4)\ y\ (5)$ y se obtiene una variable
4. Se reemplaza la variable anterior en la ecuación (4), para obtener otra variable
5. Se reemplazan las variables encontradas en la ecuación (1), (2) o (3) para obtener la otra variable

Realizaremos el procedimiento

$$\begin{cases} x + y + z = 15 & (1) \\ x - 2y + z = 0 & (2) \\ x - z = -6 & (3) \end{cases}$$

1. Se elimina una variable en las ecuaciones $(1)\ y\ (2)$ y se obtiene la ecuación (4) en dos variables

$$x + y + z = 15 \quad (1)$$
$$x - 2y + z = 0 \quad (2)$$

Como la ecuación (3) esta en términos de *x* y *z*, eliminaremos la *y*, multiplicando la ecuación (1) por 2

$$x + y + z = 15 \quad (1) \qquad (2)\cdot(x + y + z = 15) \quad (1) \qquad 2x + 2y + 2z = 30 \quad (1)$$
$$x - 2y + z = 0 \quad (2) \qquad x - 2y + z = 0 \quad (2) \qquad x - 2y + z = 0 \quad (2)$$
$$3x + \quad 3z = 30 \quad (4)$$

$$x + \quad z = 10 \quad (4)$$

2. Se elimina una variable en las ecuaciones (1) y (3) y se obtiene la ecuación (5) en dos variables.
   Como la ecuación (3) ya está en términos de x y z, no es necesario realizar este paso y será la (5).

$$x - z = -6 \qquad (3) = (5)$$

3. Se elimina una variable en las ecuaciones (4) y (5) y se obtiene una variable

$$x + z = 15 \quad (4)$$
$$x - z = -6 \ (5)$$

Se puede eliminar la z, sólo realizando la suma

$$\begin{array}{l} x + z = 10 \quad (4) \\ x - z = -6 \ (5) \\ \hline 2x = 4 \end{array}$$

$$x = 2$$

4. Se reemplaza la variable anterior en la ecuación (4), para obtener otra variable

$$(2) + \quad z = 10$$
$$z = 10 - 2$$
$$z = 8$$

5. Se reemplazan las variables encontradas en la ecuación (1), (2) o (3) para obtener la otra variable

$$(2) + y + (8) = 15 \quad (1)$$
$$y = 15 - 10$$
$$y = 5$$

12.4.4 Por Cramer o determinantes

Se resuelve por determinantes, de la siguiente forma

Pasos para solucionar ecuaciones 3x3 por CRAMER

1. Se halla el determinante del sistema D_s
2. Se halla determinante de x, D_x
3. Se encuentra $x = \frac{D_x}{D_s}$
4. Se halla determinante de y, D_y

5. Se encuentra y= $\frac{D_y}{D_s}$

6. Se halla determinante de z, D_z

7. Se encuentra z= $\frac{D_z}{D_s}$

Como se trata de ecuaciones 3x3, es necesario duplicar las dos primeras columnas para resolverlos en forma horizontal o repetir las dos primeras filas para hacerlo vertical.
Se sugiere que se haga horizontal. Este método solo se utiliza para resolver ecuaciones 3x3

$$\begin{cases} x + y + z = 15 & (1) \\ x - 2y + z = \ 0 & (2) \\ x - z = -6 & (3) \end{cases}$$

Seguimos los pasos indicados

1. Se halla el determinante del sistema D_s
2.

$$D_s = \begin{array}{ccccc} C_x & C_y & C_z & & \\ \end{array}$$
$$D_s = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right| = (2+1+0) - (-2+0-1)$$

$$(3) - (-3)$$
$$3 + 3$$
$$D_s = 6$$

3. Se halla determinante de *x*, D_x
   Cuando se trata de buscar el determinante de *x*, en su lugar se coloca el término independiente

$$\begin{array}{ccccc} Ti & C_y & C_z & & \end{array}$$
$$D_x = \left| \begin{array}{ccc|cc} 15 & 1 & 1 & 15 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -1 & -6 & 0 \end{array} \right| = (30 - 6 + 0) - (12 + 0 - 0)$$

$$(24) - (12)$$
$$24 - 12$$
$$D_x = 12$$

4. Se encuentra $x = \frac{D_x}{D_s}$

$$x = \frac{D_x}{D_s} = \frac{12}{6}$$
$$x = 2$$

5. Se halla determinante de y, D_y

   Se puede hallar los siguientes determinantes, teniendo en cuenta que:
   - Cuando se busca la y, el término independiente ocupa su lugar
   - Cuando se busca la y, el término independiente ocupa su lugar

   Para este ejercicio es preferible reemplazar la x en la ecuación (3) y continuar con sustitución para evitar la realización de los otros determinantes.

$$x - z = -6 \qquad (3)$$
$$(2) - z = -6 \qquad (3)$$

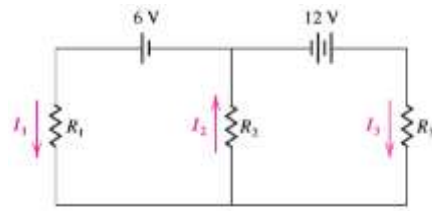
$$z = 8$$

6. Reemplazamos *x* y *z* en la ecuación (1)

$$x + y + z = 15 \quad (1)$$
$$(2) + y + (8) = 15 \quad (1)$$

$$y = 5$$

Ejemplo 42: En la figura se muestra el diagrama de un circuito eléctrico que contiene tres resistores, una batería de 6 volts y una batería de 12 volts. Se puede demostrar, usando las leyes de Kirchhoff, que las tres corrientes, I1, I2 e I3 son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:



$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 & (1) \\ R_1\, I_1 + R_2 I_2 = 6 & (2) \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = 12 & (3) \end{cases}$$

Encuentre las tres corrientes si
- $R_1 = R_2 = R_3 = 3 \text{ ohms}$
- $R_1 = 4 \text{ ohms}, R_2 = 1 \text{ ohms}, R_3 = 4 \text{ ohms}$

- Para $R_1 = R_2 = R_3 = 3 \text{ ohms}$

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 & (1) \\ 3\, I_1 + 3I_2 = 6 & (2) \\ 3I_2 + 3I_3 = 12 & (3) \end{cases}$$

Visita la escena interactiva de la página 261 del libro interactivo "Matemáticas Operativas", en la cual podrás recordar lo visto hasta el momento sobre solución de ecuaciones lineales 3x3 por los métodos de determinantes o Cramer.

a. **Por Sustitución**:

Recuerden que debemos encontrar las ecuaciones (4) y (5) en términos de 2 variables, es decir, dos ecuaciones de 2x2.
Para ello realizamos el siguiente procedimiento:
Paso 1: Despejamos una variable en ecuación (1) y la reemplazamos en la ecuación (2) para obtener las ecuaciones (4):

$I_1 = I_2 - I_3 \quad (1)$

$3\,(I_2 - I_3) + 3I_2 = 6$

$3\,I_2 - 3I_3 + 3I_2 = 6$

$6\,I_2 - 3I_3 = 6$, podemos dividir toda la ecuación por 3

$2\,I_2 - I_3 = 2 \quad (4)$

Paso 2: Reemplazamos la variable despejada en el paso 1, en la ecuación (4) para obtener la ecuación (5).

$3I_2 + 3I_3 = 12 \quad (3)$, (podemos dividir por 3)

Dado que la ecuación (3), está en los mismos términos de la ecuación (4), la podemos tomar como la ecuación (5)

$I_2 + I_3 = 4 \quad (5)$

Paso 3: Despejamos una variable en la ecuación (4) y la reemplazamos en la ecuación (5)

$I_3 = 2\,I_2 - 2$

Paso 4: Reemplazamos en la ecuación (5)

$I_2 + (2\,I_2 - 2) = 4$

$I_2 + 2\,I_2 - 2 = 4$

$3\,I_2 = 6$

$I_2 = 2$

Paso 5: Reemplazamos I_2 en la ecuación (4), en la despejada (paso 3)

$I_3 = 2\,(2) - 2$

$I_3 = 4 - 2$

$I_3 = 2$

Paso 6: Reemplazamos las variables encontradas, en la ecuación (1) despejada en el paso (1)

$I_1 = I_2 - I_3$

$I_1 = (2) - (2)$

$I_1 = 0$

b. **Por Igualación**:

Paso 1: Despejamos una variable en ecuación (1) , despejamos la misma variable en la ecuación (2) , igualamos la variable despejada en las ecuaciones (1) y (2)para obtener la ecuación (4):

En la ecuación (1),

$$I_1 = I_2 - I_3$$

En la ecuación (2)

$$3\,I_1 + 3I_2 = 6$$

$$I_1 + I_2 = 2$$

$$I_1 = 2 - I_2$$

Igualamos:

$$I_2 - I_3 = 2 - I_2$$

$$2I_2 - I_3 = 2 \quad (4)$$

Paso 2: Despejamos la misma variable despejada en ecuación (1) , en la ecuación (3) , igualamos la variable despejada en las ecuaciones (1) y (3) para obtener la ecuación (5):

$$3I_2 + 3I_3 = 12 \quad (3)$$

$I_2 + I_3 = 4$, dado que la ecuación (3) está en los mismos términos de la ecuación (4), la tomaremos como ecuación (5)

$$I_2 + I_3 = 4 \quad (5)$$

Paso 3: Despejamos la misma variable en las ecuaciones (4) y (5) y las igualamos:

En la ecuación (4):

$$I_3 = 2I_2 - 2$$

En la ecuación (5):

$$I_3 = 4 - I_2$$

Igualamos:

$$2I_2 - 2 = 4 - I_2$$

$$3I_2 = 6$$

$$I_2 = 2$$

Paso 4: Reemplazamos la variable encontrada las ecuaciones (4) o (5) despejadas.

En la ecuación (4):

$$I_3 = 2I_2 - 2$$

$$I_3 = 2(2) - 2$$

$$I_3 = 4 - 2$$

$$I_3 = 2$$

Paso 5: Reemplazamos I_2 e I_3 en la ecuación (1) despejada en el paso 1.

$$I_1 = I_2 - I_3$$
$$I_1 = (2) - (2)$$
$$I_1 = 0$$

c. **Por Reducción**:
En este método se busca eliminar determinada variable en las diferentes ecuaciones planteadas.
Paso 1: Eliminamos una variable en las ecuaciones (1) y (2), para obtener la ecuación (4)

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \quad (1) \\ I_1 + I_2 \qquad &= 2 \quad (2) \end{aligned}$$

Como se puede observar, se puede eliminar I_2, ya que son iguales con signo contrario

$$\begin{aligned} I_1 - \cancel{I_2} + I_3 &= 0 \quad (1) \\ I_1 + \cancel{I_2} \qquad &= 2 \quad (2) \\ \hline 2I_1 \quad + I_3 &= 2 \quad (4) \end{aligned}$$

Paso 2: Eliminamos la misma variable en las ecuaciones (1) y (3), para obtener la ecuación (5)

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \quad (1) \\ I_2 + I_3 &= 4 \quad (3) \end{aligned}$$

Igual que en el caso anterior, es fácil eliminar I_2, ya que son iguales con signo contrario

$$\begin{aligned} I_1 - \cancel{I_2} + I_3 &= 0 \quad (1) \\ \cancel{I_2} + I_3 &= 4 \quad (3) \\ \hline I_1 \quad + 2I_3 &= 4 \quad (5) \end{aligned}$$

Paso 3: Eliminamos una variable en las ecuaciones (4) y (5),

$$\begin{aligned} 2I_1 \quad + I_3 &= 2 \quad (4) \\ I_1 \quad + 2I_3 &= 4 \quad (5) \end{aligned}$$

Podemos eliminar la variable I_1 o la I_3, para el ejercicio eliminaremos la variable I_1, multiplicando la ecuación (5) por -2

$$\begin{aligned} \cancel{2I_1} \quad + I_3 &= 2 \quad (4) \\ -\cancel{2I_1} \quad - 4I_3 &= -8 \quad (5) \\ \hline -3I_3 &= -6 \quad (5) \\ 3I_3 &= 6 \\ I_3 &= 2 \end{aligned}$$

Paso 4: Conociendo I_3, lo reemplazamos en la ecuación (4) o (5)

$$
\begin{aligned}
2I_1 \quad &+ I_3 = 2 \quad (4)\\
2I_1 \quad &+ (2) = 2\\
2I_1 \quad &\quad = 0\\
&I_1 = 0
\end{aligned}
$$

Paso 5: Conociendo I_1 e I_3 la podemos reemplazar en las ecuaciones (1), (2) o (3)

Si reemplazamos en la ecuación 3, obtenemos

$$
\begin{aligned}
I_2 + I_3 &= 4 \quad (3)\\
I_2 + (2) &= 4 \quad (3)\\
I_2 &= 2
\end{aligned}
$$

d. **Por Cramer o determinantes**: Se resuelve por determinantes, de la siguiente forma

Pasos para solucionar ecuaciones 3x3 por CRAMER

1. Se halla el determinante del sistema D_s
2. Se halla determinante de I_1, D_{I_1}
3. Se encuentra $I_1 = \frac{D_{I_1}}{D_s}$
4. Se halla determinante de I_2, D_{I_2}
5. Se encuentra $I_2 = \frac{D_{I_2}}{D_s}$
6. Se halla determinante de I_3, D_{I_3}
7. Se encuentra $I_3 = \frac{D_{I_3}}{D_s}$

Paso 1: Se halla el determinante del sistema D_s

$$
\begin{cases}
I_1 - I_2 + I_3 = 0 & (1)\\
I_1 + I_2 \quad\;\; = 2 & (2)\\
\qquad I_2 + I_3 = 4 & (3)
\end{cases}
$$

$$D_s = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. = (1-0+1)-(0+0-1)$$

$$D_s = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. = (2)-(-1)$$

$$D_s = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. = 2+1$$

$$D_s = 3$$

Paso 2: Se halla determinante de I_1

$$D_{I_1} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right. = (0-0+2)-(4+0-2)$$

$$D_{I_1} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right. = (2)-(2)$$

$$D_{I_1} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right. = 0$$

$$D_{I_1} = 0$$

Paso 3: Se encuentra $I_1 = \frac{D_{I_1}}{D_s}$

$$I_1 = \frac{D_{I_1}}{D_s} = \frac{0}{3}$$

$$I_1 = 0$$

Paso 4: Se halla determinante de I_2, D_{I_2}

$$D_{I_2} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right. = (2+0+4)-(0+0+0)$$

$$D_{I_2} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right. = (6)-(0)$$

$$D_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{matrix} = 6$$

$$D_{I_2} = 6$$

Paso 5: Se encuentra $I_2 = \frac{D_{I_2}}{D_S}$

$$I_2 = \frac{D_{I_2}}{D_S} = \frac{6}{3}$$

$$I_2 = 2$$

Teniendo los valores de I_1 e I_2, podemos reemplazar estos valores en las ecuaciones (1), (2) o (3), para obtener la variable restante.

Reemplazando en la ecuación (1), se obtiene,

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \qquad (1)$$

$$(0) - (2) + I_3 = 0$$

$$I_3 = 2$$

Para practicar, lo solucionaremos por Cramer.

Paso 6: Se halla determinante de I_3, D_{I_3}

$$D_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = (4 - 0 + 0) - (0 + 2 - 4)$$

$$D_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = (4) - (-2)$$

$$D_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 6$$

$$D_{I_3} = 6$$

Paso 7: Se encuentra $I_3 = \frac{D_{I_3}}{D_S}$

$$I_3 = \frac{D_{I_3}}{D_S} = \frac{6}{3}$$

$$I_3 = 2$$

- Para $R_1 = 4 \text{ ohms}, R_2 = 1 \text{ ohms}, R_3 = 4 \text{ ohms}$, resolver utilizando uno de los métodos anteriores.

Bienvenidos a seguir ampliando los conocimientos adquiridos hasta el momento. En esta oportunidad, les invito a poner en práctica sus conocimientos sobre operaciones y propiedades de las expresiones algebraicas, resolución de problemas y simplificación de expresiones racionales.

Así que, los invito a poner en práctica todo lo aprendido y a resolver con éxito los ejercicios propuestos en la "Guía de trabajo independiente UNIDAD 2 – ALGEBRA".

¡Manos a la obra!

SEMANA 10

13 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES 2x2 CON ECUACIONES CUADRÁTICAS

Son aquellos sistemas de ecuaciones, donde una o ambas nos son lineales (de primer grado) presentan al menos una de un grado superior.

Generalmente se resuelven por el *método de sustitución*, en algunos casos, cuando ambas sean cuadráticas es posible que sea más sencillo utilizar el método de igualación o reducción.

Podemos encontrar los siguientes casos

13.1 *Caso 1: Una ecuación lineal y otra NO lineal*.

En este caso se utilizará el método de sustitución, realizando el procedimiento que se indicó anteriormente.

Ejemplo 43: Solucionar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Lo primero es organizar las ecuaciones, si es el caso

$$\begin{cases} x - y = -3 & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

Despejamos una variable en la ecuación lineal, la que consideres más fácil

$$x = y - 3 \quad (1)$$

Reemplazamos en la ecuación (2)

$$x^2 + y^2 = 5 \quad (2)$$

$$(y - 3\,)^2 + y^2 = 5 \quad (2)$$

Solucionamos el cuadrado de un binomio que se nos presenta al lado derecho de la igualdad y realizamos las operaciones e igualamos a cero para factorizar.

Recordemos que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$y^2 - 6y + 9 + y^2 = 5$$

$$2y^2 - 6y + 4 = 0$$

Dividimos por 2 y simplificamos

$$\frac{2y^2}{2} - \frac{6y}{2} + \frac{4}{2} = 0$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

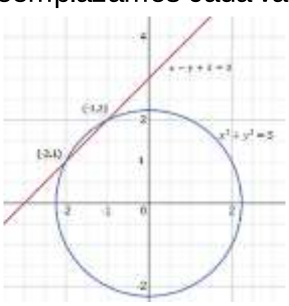
En caso de que sea posible, se factoriza o si no se utiliza la fórmula general

$$(y - 2) \cdot (y - 1) = 0$$

Igualamos cada factor a cero para obtener:

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Reemplazamos cada valor en la ecuación (1) despejada $x = y - 3$, para obtener:



$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 3 \\ x_2 = y_2 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (2) - 3 \\ x_2 = (1) - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

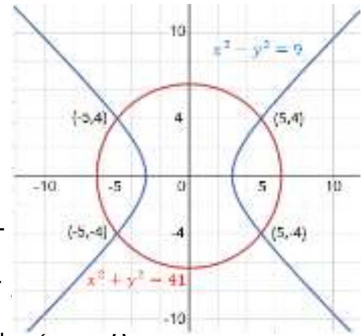
Interpretación geométrica

13.2 *Caso 2*: Ambas ecuaciones son NO lineales.

Podemos utilizar el método de reducción, en caso de que ambas ecuaciones sean cuadráticas.

Ejemplo 44: Solucionar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 & (1) \\ x^2 - y^2 = 9 & (2) \end{cases}$$



Interpretación geométrica

Si utilizamos el método de reducción, podemos eliminar y^2

$$x^2 + \cancel{y^2} = 41$$

$$x^2 - \cancel{y^2} = 9$$

$$2x^2 = 50$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25}$$

$$x = \pm 5$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Ahora eliminemos ecuación (2) por -1

$$\cancel{x^2} + $$

$$-\cancel{x^2} + y^2 = -9$$

$$2y^2 = 32$$

$$y^2 = 16$$

$$y = \pm\sqrt{16}$$

$$y = \pm 4$$

$$\begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

13.3 *Caso 3*: Una ecuación lineal y una irracional.

Podemos utilizar el método que más se facilite

Ejemplo 45: Solucionar el siguiente sistema de ecuaciones el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 & (1) \\ 2x - 3y = 1 & (2) \end{cases}$$

Nota: Al eliminar el radial, elevando al cuadrado cada lado de la igualdad en la ecuación (1) y luego utilizar el método adecuado. Se debe tener en cuenta que, al tratarse de un radical, se obtienen dos respuestas, una negativa y otra positiva. En el ejemplo se plantea únicamente la respuesta positiva, que es el signo que precede la raíz.

$$\left(2 \cdot \sqrt{x+1}\right)^2 = (y+1)^2 \quad (1)$$

$$4(x+1) = y^2 + 2y + 1 \quad (1)$$

$$4x + 4 = y^2 + 2y + 1 \quad (1)$$

$$y^2 - 4x + 2y = 3 \quad (1)$$

Ahora podemos eliminar la nueva ecuación (1) con la (2), multiplicando la segunda por 2

$$y^2 - 4x + 2y = 3 \ (1)$$

$$4x - 6y = 2 \ (2)$$

$$y^2 \qquad - 4y = 5$$

Igualamos a cero para tratar de factorizar

$$y^2 - 4y - 5 = 0$$

Factorizamos

$$(y-5) \cdot (y+1) = 0$$

$$y_1 = 5$$

$y_2 = -1$, este valor no aplica para el ejemplo

Despejamos la x en la ecuación (2) y reemplazamos y_1 e y_2

$$2x - 3y = 1$$

$$x_1 = \frac{1+3y_1}{2}$$

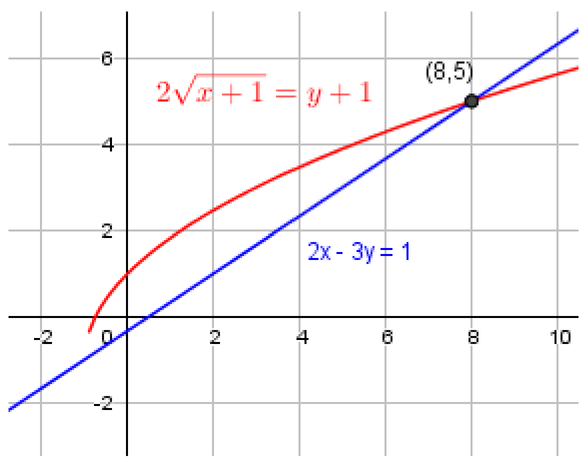
$$x_1 = \frac{1+3y_1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+3(5)}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+3(5)}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+15}{2}$$

$$x_1 = 8$$



Interpretación geométrica

Con base en lo estudiado y guiándose con los ejemplos 36 al 43, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x-2y=-4 \end{cases}$	$x=0; y=2$	2. $\begin{cases} 4x-y+1=0 \\ x+3y+9=0 \end{cases}$	$x=-\frac{12}{13};\ y=-\frac{35}{13}$
3. $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$	$x=\frac{3}{2}; y=-\frac{1}{2}$	4. $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x-2y=8 \end{cases}$	$x=4;\ y=-2$
5. $\begin{cases} 2x+5y=16 \\ 3x-7y=24 \end{cases}$	$x=8; y=0$	6. $\begin{cases} \frac{1}{3}c+\frac{1}{2}d=5 \\ c-\frac{2}{3}d=-1 \end{cases}$	$x=\frac{51}{13};\ y=\frac{96}{13}$
7. $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y-4z=-8 \end{cases}$	$x=1; y=2; z=3$	8. $\begin{cases} 2x+6y+z=-2 \\ 3x+4y-z=2 \\ 5x-2y-2z=0 \end{cases}$	$x=-1; y=\frac{1}{2}; z=-3$
9. $\begin{cases} x-5y+z=0 \\ 10x+y+3z=0 \\ 4x+2y-5z=0 \end{cases}$	$x=0; y=0; z=0$	10. $\begin{cases} x-3y=22 \\ y+6z=-3 \\ \frac{1}{3}x+2z=3 \end{cases}$	$x=7; y=-5; z=\frac{1}{3}$
11. $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y+2z=11 \\ 4x+3y-6z=-18 \end{cases}$	$x=\frac{3}{2}; y=-1; z=\frac{7}{2}$	12. $\begin{cases} 5x+2y-z=-7 \\ x-2y+2z=0 \\ 3y+z=17 \end{cases}$	$x=-2; y=4; z=5$
13. $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3 \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{z}=-1 \\ \frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{2} \end{cases}$	$x=\frac{36}{41}; y=-\frac{18}{25};\ z=\frac{36}{17}$	14. $\begin{cases} x-2y-3z=-1 \\ 2x+y+z=6 \\ x+3y-2z=13 \end{cases}$	$x=2; y=3; z=-1$
15. $\begin{cases} y=x^2-4x \\ y=-x^2+8 \end{cases}$	$x=1\pm\sqrt{5}$	16. $\begin{cases} x^2+2(10^{2y})-3=0 \\ x-10^y=0 \end{cases}$	$x=1, y=0$
17. $\begin{cases} xy=16 \\ y=20-x^2 \end{cases}$	$x=4; -2\pm\sqrt{2},$ $y=4;\ \frac{16}{-2+\sqrt{2}}$	18. $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ -2x^2+7y^2=7 \end{cases}$	$x=\pm\frac{1}{3}\sqrt{21}, y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{15}$

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado			
19. $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ x^2-2y+y^2=0 \end{cases}$	$x=0;1, y=0;1$	20. $\begin{cases} y=x \\ y^2=x+2 \end{cases}$	$x=-1;2, y=-1;2$
21. $\begin{cases} \frac{3}{x-1}+\frac{4}{y+2}=2 \\ \frac{6}{x-1}-\frac{7}{y+2}=-3 \end{cases}$	$x=\frac{47}{2}; y=\frac{1}{7}$	22. $\begin{cases} 3logx+logy=2 \\ 5logx+2logy=1 \end{cases}$	$x=10^3; y=\frac{1}{10^7}$
23. $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ 3x+2y-z=-5 \\ 5x-2y+z=0 \end{cases}$	$x=-\frac{5}{8}; y=-\frac{1}{8}; z=\frac{23}{8}$	24. $\begin{cases} 4x-y+3z=6 \\ -8x+3y-5z=-6 \\ 5x-4y=-9 \end{cases}$	$x=3; y=6; z=0$

Problemas de aplicación

Ejercicio	Respuesta
25. **¿Cuántas monedas?**: Una persona tiene 25 monedas entre monedas de diez y veinticinco centavos, que suman en total $4.75. Determine cuántas monedas de cada una tiene la persona. R/. 5 monedas de 10 y 15 de 25 centavos	26. **Número de galones**: Un tanque de 100 galones se llena de agua en la que se disuelven 50 lb de sal. Un segundo tanque contiene 200 galones de agua con 75 lb de sal. ¿Cuánto debe sacarse de ambos tanques y mezclarse para obtener una solución de 90 galones con 40 lb de sal por galón? R/. 50 galones del primer tanque y 40galones del segundo tanque.
27. **Entradas a un estadio**: A un clásico de fútbol ingresaron 18.000 personas, entre abonados y no abonados. Si se sabe que el valor de la boleta por abonado es de $45.000 y el no abonado es de $80.000 y que se recaudaron $ 1.062.000000. ¿Cuántos abonados y no abonados ingresaron al estadio? R/. 10800 abonados y 7200 no abonados. 28. **Promedio de notas**: Cuando Beth se graduó de la universidad, había tomado 40 cursos en los que obtuvo calificaciones de A, B y C. Su promedio final fue de 3.125. Su promedio sólo en los cursos en los que recibió calificaciones de A y B fue de 3.8. Suponga que las calificaciones A, B y C valen cuatro puntos, tres puntos y	29. **Logistica de transporte**: Una empresa de transporte gestiona una flota de 60 vehìculos para el transporte diario, entre: tractomulas, doble troques y carros sencillos. Las tractomulas transportan 35 Tns y reccorren 800 kms. Los doble troques transportan 20 Tns y recorren 600 kms. Los carros sencillos transportan 10 Tns y recorren 200 kms. Diariamente los vehìculos transportan 1.400Tns y recorren 36.000 kms. Cuantas tractomulas, doble troques y carros sencillos tiene la empresa? R/. Calificaciones de $Tractomulas=20, Doble\ Troques=30, Sencillos=10$

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado

dos puntos, respectivamente. Determine la cantidad de calificaciones A, B y C que obtuvo Beth.

R/. Calificaciones de $A = 20, B = 5, C = 15$

29. **Velocidad:** Un avión vuela 3 300 mi de Hawai a California en 5.5 h con viento de cola. De California a Hawai, volando contra el viento de la misma velocidad, el viaje dura 6 h. Determine la velocidad del avión y la velocidad del viento. Recordar que $x(espacio) = V * t$

R/. $V_A = 575\frac{mi}{h},\ V_v = 25\frac{mi}{h}$

30. **Capacidad de producción**: Una compañía tiene tres máquinas, A, B y C que pueden producir cierto artículo cada de ellas. No obstante, por la falta de operadores capacitados, sólo dos de las máquinas pueden usarse simultáneamente. La tabla siguiente indica la producción de un periodo de tres días, usando varias combinaciones de las máquinas. ¿Cuánto tomaría a cada máquina, si se usa sola, producir 1000 artículos?

Máquinas usadas	Horas usadas	Artículos producidos
A y B	6	4500
A y C	8	3600
B y C	7	4900

R/. $A = 4,\ B = 2, C = 5\ Horas\ respectivamente$

31. **Mezclar granos de café**: Una tienda se especializa en preparar mezclas de café para gourmet. De granos de café de Colombia, Costa Rica y Kenia, el propietario desea preparar bolsas de 1 libra que venderá en $12.50. El costo por libra de estos cafés es $14, $10 y $12, respectivamente. La cantidad de café de Colombia debe ser el triple del de Costa Rica. Encuentre la cantidad de cada tipo de café en la mezcla.

R/.$Colombia = \frac{3}{8}, Costa\ Rica = \frac{1}{8}, Kenia = \frac{1}{2}$

32. **Pesos de cadenas**: Hay tres cadenas que pesan 450, 610 y 950 onzas, cada una de ellas formada por eslabones de tres tamaños diferentes. Cada cadena tiene 10 eslabones pequeños y también tienen 20, 30 y 40 eslabones de tamaño mediano, así como 30, 40 y 70 eslabones grandes, respectivamente. Encuentre los pesos de los eslabones pequeños, medianos y grandes.

R/. $P = 4, M = 7, G = 9\ onzas\ respectivamente$

Visita las escenas interactivas de las páginas 286 y 287, opción 1, opción 2 y opción 3 del libro interactivo "Matemáticas Operativas", con las cuales podrás resolver ejercicios sobre factorización y ecuaciones, que te serán de utilidad para preparar el seguimiento institucional, ya que cuentas con tres opciones de los contenidos a evaluar.

SEMANA 11

14 LOGARITMOS

Los logaritmos con base $b = 10$ se llaman **logaritmos en base 10** o comunes y los logaritmos en base $b = e$ se **llaman logaritmos naturales.**

Se acostumbra escribir el logaritmo natural como

$$Log_e x = \ln x$$

Para:

$$Log_B P = E, \text{ para toda base } B > 0, B \neq 1$$

Donde:

$B = Base$, $P = Potencia$ y $E = Exponente$

Podemos convertir logaritmos en potencias de la siguiente forma:

Logaritmos	Potencia
$Log_B P = E$	$B^E = P$

$$Log_{10} 100 = 2, \text{ si y sólo si } 10^2 = 100$$

Observen que, en el ejemplo, el logaritmo en base 10 de 100 es 2, si y sólo si la $B = 10$, elevado al exponente $E = 2$, es igual a la potencia $P = 100$.

Ejemplo 44: Convertir los logaritmos en potencias

a. $log_{10} x = 2$
Si lo expresamos en forma de potencia, nos quedaría:
$$10^2 = x$$
$$100 = x$$

b. $log_2 x = 4$
Si lo expresamos en forma de potencia, nos quedaría:
$$2^4 = x$$
$$16 = x$$

c. $log_3 2187 = y$
Si lo expresamos en forma de potencia, nos quedaría:
$$3^y = 2187$$
$$3^y = 3^7$$

La igualdad se cumple, si y sólo si $y = 7$, dado que las bases de ambos lados de la igualdad son iguales a 3.

Propiedades de los logaritmos
Para toda base $B > 0$, $B \neq 1$, para los números positivos M y N, 1. $log_B MN = log_B M + log_B N$ 2. $log_B \frac{M}{N} = log_B M - log_B N$ 3. $log_B M^k = k log_B M$, para cualquier número real k. 4. $log_B B = 1$

Ejemplo 45: Propiedades de los radicales

a. $log_a x^3\sqrt{y}$

$$\begin{aligned} log_a x^3\sqrt{y} &= log_a x^3 + log_a\sqrt{y} \\ &= 3log_a x + log_a y^{\frac{1}{2}} \\ &= 3log_a x + \frac{1}{2}log_a y \end{aligned}$$

b. $log_a \frac{x^3}{z^2}$

$$\begin{aligned} log_a \frac{x^3}{z^2} &= log_a x^3 - log_a z^2 \\ &= 3log_a x - 2log_a z \end{aligned}$$

c. $log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{z^2}$

$$\begin{aligned} log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{z^2} &= log_a x^3 + log_a\sqrt{y} - log_a z^2 \\ &= 3log_a x + log_a y^{\frac{1}{2}} - 2log_a z \\ &= 3log_a x + \frac{1}{2}log_a y - 2log_a z \end{aligned}$$

d. $\frac{1}{3}log_a(x^2-1) - log_a\, y - 4log_a\, z$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}log_a(x^2-1) - log_a\, y - 4log_a\, z &= log_a(x^2-1)^{\frac{1}{3}} - (log_a\, y + log_a\, z^4) \\ &= log_a(x^2-1)^{\frac{1}{3}} - (log_a\, yz^4\,) \\ &= log_a \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{yz^4} \end{aligned}$$

$$= log_a \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)}}{yz^4}$$

15 ECUACIÓNES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, se recomienda

i) Reescriba una expresión exponencial como expresión logarítmica.

ii) Reescriba una expresión logarítmica como expresión exponencial.

iii) Use las propiedades uno a uno de b^x y $log_b x$.

iv) Para las ecuaciones de la forma $a^x{}_1 = b^x{}_2$, donde $a \neq b$, obtenga el logaritmo natural de ambos lados de la igualdad y simplifique usando las leyes de los logaritmos.

Para convertir logaritmos en exponenciales, puede ser de utilidad lo siguiente:

Forma de Logaritmos	Condición	Forma de Potencias
$log_b P = E$	Si y sólo si	$b^E = P$

$log_{10} 100 = 2$ Si y sólo si $10^2 = 100$

Observen que si queremos convertir la expresión $10^2 = 100$, en una expresión logarítmica se debe sacar logaritmo a cada lado de la igualdad

$log 10^2 = log 100$ $2 \cdot \log 10 = log 100$

$2 \cdot (1) = log 100$ $2 = log 100$

Recuerden que, para los logaritmos decimales la base es 10 y por lo general se omite, mientras que, para los logaritmos naturales o neperianos, la base es en número Euler *e*.

Ejemplo 46: Ecuaciones logarítmicas

a. Para k, $e^{10k} = 7$. Aplicamos logaritmos a lado y lado de la igualdad

$ln_e e^{10k} = ln_e 7$ $10k ln_e e = ln_e 7$

Recordemos que el $log_{10} 10 = 1$ y $ln_e e = 1$ y se pueden omitir sus bases ya que se entiende que si es ln, la base *e* y si es log, la base es 10.

$10k(1) = ln7$ $\qquad$ $10k(1) = ln7$

$k = \frac{ln7}{10}$ $\qquad$ $k \approx 0.1946$

b. Resuelva $log_2 x = 5$

$log_b P = E$ $\qquad$ Si y sólo si $\qquad$ $b^E = P$

Entonces $2^5 = x$, por lo que $x = 32$

c. $2^{x-3} = 8^{x+1}$
Para solucionar la ecuación es conveniente convertir 8^{x+1} en base 2, de la siguiente forma
$2^{x-3} = (2^3)^{x+1}$, aplicando la propiedad de potencia de una potencia,

$2^{x-3} = 2^{3x+3}$, ahora, si las bases son iguales, los exponentes tienen que ser iguales $2 = 2$ entonces $x - 3 = 3x + 3$. Despejando la x, nos queda:

$x - 3x = 3 + 3$ $\qquad$ $-2x = 6$

$x = -3$

Para que profundices en tus conocimientos, observa con detenimiento el video "Ecuaciones exponenciales - Ejercicio 3", en el cual se explica la solución de una ecuación exponencial, paso a paso, tal como se hizo en los ejemplos anteriores. (Ríos G, 20158)

Si lo resolvemos aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad, nos quedaría

$2^{x-3} = 2^{3x+3}$ $\qquad$ $log 2^{x-3} = log 2^{3x+3}$

$(x - 3) \cdot \log 2 = (3x + 3) \cdot log\, 2$ $\qquad$ Si, $\log 2 = log\, 2$, entonces

$(x - 3) = (3x + 3)$ $\qquad$ $x - 3 = 3x + 3$

$-2x = 6$ $\qquad$ $x = -3$

Para que profundices en tus conocimientos, observa con detenimiento el video "Ecuaciones exponenciales - Ejercicio 4", en el cual se explica la solución de una ecuación exponencial, paso a paso, que se soluciona con logaritmos, tal como se hizo en los ejemplos anteriores. (Ríos G, 2015)

d. Resolver a partir de la ecuación equivalente

$log_b P = E$ Si y sólo si $b^E = P$

Si partimos de $b^E = P$, y sacamos log_a en cada lado de la igualdad, obtenemos

$b^E = P$

$log_a b^E = log_a P$

$E \cdot log_a b = log_a P$

$$E = \frac{log_a P}{log_a b}$$

Como $E = log_b P$, podemos concluir que $log_B P = \frac{log_a P}{log_a b}$

Teorema: Cambio de base	Si $P > 0$, y si a y b son números reales positivos diferentes de 1, entonces: $$log_b P = \frac{log_a P}{log_a b}$$

e. Resuelva la ecuación

$$\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$$

$$5^x - 5^{-x} = 6$$

$$5^x - \frac{1}{5^x} = 6$$

$$\frac{(5^x)^2 - 1}{5^x} = 6$$

$$(5^x)^2 - 1 = 6(5^x)$$

$$(5^x)^2 - 6(5^x) - 1 = 0$$

Es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, lo resolvemos por la formula general

$$5^x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1)}}{2}$$

$$5^x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2}$$

$$5^x = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$5^x = \frac{6 \pm \sqrt{2^2 \cdot 10}}{2}$

$5^x = \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2}$

$5^x = 3 \pm \sqrt{10}$, se toma la raíz $3 + \sqrt{10}$ porque $\left(3 - \sqrt{10}\right) < 0$ y $5^x > 0$

$5^x = 3 + \sqrt{10}$

Aplicamos logaritmo a cada lado de la igualdad

$log 5^x = log\left(3 + \sqrt{10}\right)$

Aplicamos propiedades de logaritmos

$x \cdot \log 5 = log\left(3 + \sqrt{10}\right)$

Despejamos la *x*

$x = \frac{log\left(3 + \sqrt{10}\right)}{\log 5}$

$x \approx 1.13$

f. Resuelva la ecuación para *x*

$ln\, 2 + ln(4x - 1) = ln(2x + 5)$

Observen el lado izquierdo de la igualdad es una suma de logaritmos y por propiedad, es el logaritmo del producto

$ln\, [2 \cdot (4x - 1)] = ln(2x + 5)$

Ahora, si $ln = ln$, entonces:

$[2 \cdot (4x - 1)] = (2x + 5)$

Resolvemos

$8x - 2 = 2x + 5$

$8x - 2x = 5 + 2$

$6x = 7$

$x = \frac{7}{6}$

g. Resuelva para *x*

$e^{2x} = 3^{x-4}$

Como la base es *e*, utilizamos *ln* en ambos lados de la igualdad

$lne^{2x} = ln3^{x-4}$

$2x \cdot \ln e = (x - 4) \cdot \ln 3$

$2x = (x - 4) \cdot \ln 3$

$2x = x \cdot \ln 3 - 4ln3$

$2x - x \cdot \ln 3 = -4 \ln 3$

Sacamos factor común *x*

$x(2 - \ln 3) = -4 \ln 3$

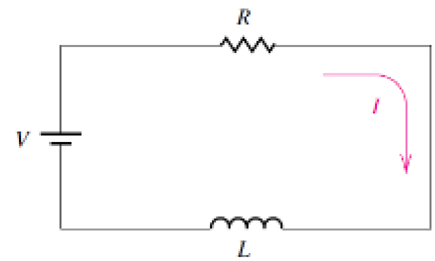
Despejamos *x*

$x = -\frac{4 \ln 3}{(2 - \ln 3)}$

$x \approx -4.8752$

Ejemplo 47: Aplicaciones

a. **Circuito eléctrico**: Un diagrama de un circuito eléctrico sencillo formado por un resistor y un inductor se muestra en la siguiente figura. La corriente I en el tiempo t está dada por la fórmula $I = 20e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia y L es la inductancia. De esta ecuación despeje t.



Solución:

$I = 20e^{-Rt/L}$

Despejaremos *t* aplicando logaritmos, pero antes pasamos el 20 a dividir

$\frac{I}{20} = e^{-Rt/L}$

$ln\left(\frac{I}{20}\right) = \ln e^{-Rt/L}$

$ln\left(\frac{I}{20}\right) = -\frac{Rt}{L}\ln e$

Sabemos que $ln_e e = 1$

$ln\left(\frac{I}{20}\right) = -\frac{Rt}{L}$

$\frac{Rt}{L} = -ln\left(\frac{I}{20}\right)$

Despejamos *t*

$t = -\frac{L}{R} \cdot ln\left(\frac{I}{20}\right)$

b. **Enfriamiento de un pastel**: Se saca un pastel del horno, cuya temperatura era de 350 °F, y se lo coloca en una cocina donde la temperatura ambiente es de 75 °F. Un minuto después, se mide la temperatura del pastel y resulta de 300 °F. Suponga que la temperatura del pastel en la cocina está dada por la ley de Newton de calentamiento/enfriamiento:

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}, k < 0.$$

- ¿Cuál es la temperatura del pastel 6 minutos después?
- ¿En cuánto tiempo la temperatura del pastel será de 80 °F?

Solución:

- ¿Cuál es la temperatura del pastel 6 minutos después?
  Dado que:

$T_{0=}350\ °\mathrm{F}$

$T_{m=}75\ °\mathrm{F}$

Sabemos que la temperatura en un minuto es:

$T(1) = 300\ °\mathrm{F}$

$T(1) = 300\ °\mathrm{F}$

Reemplazamos en

$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$

$300 = 75 + (350 - 75)e^{k}$

$300 - 75 = (350 - 75)e^{k}$

$225 = (275)e^{k}$

$\frac{225}{275} = e^{k}$

Simplificamos, ya que la fracción es divisible por 25

$\frac{9}{11} = e^{k}$

Utilizamos logaritmos para despejar la *k* en cada lado de la igualdad

$ln\left(\frac{9}{11}\right) = lne^{k}$

$ln\left(\frac{9}{11}\right) = k$

$k \approx -0.2007$

Como conocemos el valor aproximado de *k* y sabemos que: $T(t) = 75 + 275e^{kt}$, hallaremos $T(6)$

$T(6) = 75 + 275e^{6\cdot(-0.2007)}$

$T(6) = 75 + 275\mathrm{e}^{-1.2042}$

$T(6) \approx 157.5\ °\mathrm{F}$

- ¿En cuánto tiempo la temperatura del pastel será de 80 °F?

Sabemos que:
$T(t) = 80\ °\mathrm{F}$ y $k = -0.2007$
$T(t) = 75 + 275e^{kt}$

$80 = 75 + 275e^{\,-0.2007t}$

$80 - 75 = 275e^{-0.2007t}$

$\frac{5}{275} = e^{-0.2007t}$

Despejamos *t*, utilizando logaritmos

$ln\left(\frac{1}{55}\right) = lne^{-0.2007t}$

$ln\left(\frac{1}{55}\right) = -0.2007t \cdot ln\, e$

$$\frac{ln\left(\frac{1}{55}\right)}{-0.2007} = t \qquad t \approx 19.97\ seg$$

Con base en lo estudiado y guiándose con los ejemplos 44 al 47, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado y simplificar, si es posible			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $(x^7)^2$	x^{14}	2. $\left(\frac{x^{\cdot 2}}{y^{\cdot 3}}\right)^2$	$\frac{x^{\cdot 4}}{y^6}$
3. $(2a^5b^3)^2\ (3a^3b^2)^3$	$108a^{19}b^{12}$	4. $\frac{(x^2\ y^3)^4}{x^2}\frac{(xy^4)}{y}^{-3}$	$\frac{x^{\cdot 3}}{y}$
5. $\sqrt[3]{\sqrt{64x^2}}$	$2\sqrt[3]{x}$	6. $\sqrt[3]{a^2b}\ \sqrt[3]{a^4b}$	$a^2\sqrt[3]{b^2}$
7. $\sqrt[4]{x^{\cdot 4}y^{\cdot 2}z^{\cdot 2}}$	$x\ \sqrt[4]{y^{\cdot 2}z^{\cdot 2}}$ $x\sqrt{yz}$	8. $\sqrt[4]{(-3)^{\cdot 4}}$	± 3
Expresar en forma de logaritmos o potencias, según el caso			
9. $ln\ 5 = x$	$e^x = 5$	10. $ln\ (x+1) = 2$	$e^2 = (x+1)$
11. $ln\ (x-1) = 4$	$e^4 = (x-1)$	12. $ln\ e^{lnx} = 5$	$e^5 = e^{lnx}$
13. $4^{-\frac{3}{2}} = 0.125$	$log_4\ 0.125 = -\frac{3}{2}$	14. $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$	$ln\ \frac{1}{e^2} = -2$
15. $e^x = 5$	$ln\ 5 = x$	16. $e^{(x+1)} = 0.5$	$ln\ 0.5 = (x+1)$
17. $e^{0.5x} = t$	$ln\ t = 0.5x$	18. $e^{(x-1)} = 4$	$ln\ 4 = (x-1)$
Solucionar para "x"			
19. $3^{x+2} = 7$	$x = \frac{log7}{\log 3} - 2$	20. $8e^{2x} = 20$	$x = \frac{\ln(\frac{5}{2})}{2}$

|

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado y simplificar, si es posible

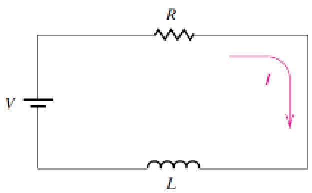
21. $e^{3-2x} = 4$	$x = \dfrac{3-\ln 4}{2}$	22. $2^{log_2(x+2)} = 2^5$	$x = 30$
23. $log_2(25-x) = 3$	$x = 17$	24. $log(x+2) + log(x-1) - 1 = 0$	$x = 3$
25. $log\, x = 1 - log(x-3)$	$x = 5$	26. $log(5x+1) = 2 + log(2x-3)$	$x = \dfrac{301}{195}$
27. $y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	. $x = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}\right)$	28. $e^x + 4e^{-x} = 5$	$x = ln\, 1;\ ln\, 4$
29. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2+1}\right)$	30. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right)$
31. $log\sqrt{x} = \sqrt{log\, x}$	$x = 10000$	32. $log(x^2+4) - log(x+2) = 2 + log(x-2)$	$x = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{101}{11}}$
33. $log_3(x-4) = log_3(-x+2)$	$x = 3$	34. $log(x-4) - log(3x-10) = log(1/x)$	$x = 2;\ 5$
35. $ln\, x^2 = ln(12-x)$	$x = 3$	36. $log_5(4x-5) = log_5(2x+1)$	$x = 3$

Aplicación de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ejercicio	Respuesta
1. Suponga que una población está creciendo continuamente a razón de 4% por año. Aproxime el tiempo que toma una población para duplicar su tamaño, es decir, **su tiempo de duplicación**. Si usamos la fórmula del crecimiento $q = q_0 e^{rt}$, sea $q = 2q_0$ **Respuesta**: $t = 17{,}3\ años$	1. **Escala de Richter**: Use la fórmula de la escala de Richter $R = log\frac{I}{I_0}$ para hallar la magnitud de un terremoto que tiene una intensidad de: **a.** 100 veces la de I_0 R/. 2 **b.** 10.000 veces la de I_0 R/. 4 100.000 veces la de I_0 R/. 5
3. **Circuito eléctrico:** Un diagrama de un circuito eléctrico sencillo formado por un resistor y un inductor se muestra en la siguiente figura. La corriente I en el	4. **Enfriamiento de un pastel:** Se saca un pastel del horno, cuya temperatura era de 350 °F, y se lo coloca en una cocina donde la temperatura ambiente es de 75 °F. Un

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado y simplificar, si es posible

tiempo t está dada por la fórmula $I = 20e^{-Rt/L}$, donde *R* es la resistencia y *L* es la inductancia. De esta ecuación despeje *t*.



R/. $t = -\frac{L}{\mathrm{R}} \ln\left(\frac{\mathrm{I}}{20}\right)$

minuto después, se mide la temperatura del pastel y resulta de 300 °F. Suponga que la temperatura del pastel en la cocina está dada por la ley de Newton de calentamiento/enfriaamiento:

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}, k < 0.$$

a. ¿Cuál es la temperatura del pastel 6 minutos después?
b. ¿En cuánto tiempo la temperatura del pastel será de 80 °F?

Respuestas:

a. 157.5 °F (Se debe determinar inicialmente el valor *k*)

t = 20 minutos

5. **Interés compuesto** (Valor Futuro=*S*): Supongamos que se depositan $1 000 en una cuenta de ahorros, cuya tasa de interés anual es 3%. Comparar el valor futuro de este principal dentro de 10 años, sabiendo que $S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, si se compone el interés mensualmente.

R/. $1 349.35.

6. **Aproximar la penetración de luz en un océano**: La ley de Beer-Lambert expresa que la cantidad de luz *I* que penetra a una profundidad de *x* metros en un océano está dada por $I = I_0 c^x$, donde $0 < c < 1$ e I_0 es la cantidad de luz en la superficie.

a. Despeje *x* en términos de logaritmos comunes.

b. Si $c = \frac{1}{4}$, aproxime la profundidad a la que $I = 0.01 I_0$. (Esto determina la zona fótica donde puede tener lugar la fotosíntesis.)

Respuestas:

a. $x = \frac{log\left(\frac{I}{I_0}\right)}{\log c}$

$$x = \frac{2}{\log 4} = 3.32\ m$$

7. **Aproximar la penetración de luz en un océano**:Nivel de colesterol en mujeres Estudios que relacionan el nivel de colesterol de suero, con

8. **Presión de aire**: La presión de aire p(h) (en lb/in2), a una altitud de h pies sobre el nivel del mar, se puede

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado y simplificar, si es posible

enfermedades coronarias,sugieren que un factor de riesgo es la razón entre x y la cantidad total C de colesterol en la sangre y la cantidad H de colesterol lipoproteínico de alta densidad en la sangre. Para una mujer, el riesgo de vida R de tener un ataque cardiaco se puede aproximar con la fórmula $R = 2.07\ln x - 2.04$. Calcule R para una mujer con $C = 242$ y $C = 78$.

R/. 30.37%

aproximar con la fórmula $p(h) = 14.7e^{-0.0000385\text{h}}$. ¿Aproximadamente a

qué altitud h la presión del aire es:

a. 10 lb/in²
b. la mitad de su valor al nivel del mar? Se sabe que la presión a nivel del mar es de $14.7\text{lb}/\text{in}^2$

Respuestas:

a. 10006.81 pies

18003.82 pies

7. **Crecimiento demográfico**: Un alumno enfermo de un virus de catarro regresa a un colegio aislado, de 2 000 estudiantes. La cantidad de estudiantes infectados con catarro, t días después del regreso del alumno enfermo, se calcula con la función logística $P(t) = \frac{2000}{1+1999e^{-0.8905t}}$
   a. De acuerdo con este modelo, ¿cuántos estudiantes serán infectados por el catarro después de 5 días?
   b. ¿Cuánto tiempo pasará para que la mitad de la población de estudiantes quede infectada?
   c. ¿Cuántos alumnos indica el modelo que se infectarán después de un tiempo muy prolongado?

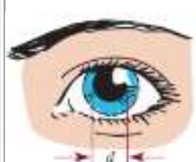
Respuestas:

a. 82 estudiantes
b. 8.53 días

2000 estudiantes

8. **Pupila del ojo**: Un modelo empírico, inventado por DeGroot y Gebhard, relaciona el diámetro *d* de la pupila, en milímetros, con la luminancia B de la fuente luminosa (expresada en mililamberts, mL):

$$\log d = 0.8558 - 0.000401(8.1 + logB)^3$$



a. La luminancia promedio del cielo claro es aproximadamente de $B = 255\ mL$ mL. Calcule el diámetro de pupila correspondiente.
b. La luminancia del Sol varía entre aproximadamente $B = 190000\ mL$ en la aurora, hasta $B = 51000000\ mL$ a mediodía. Calcule los diámetros correspondientes de pupila.
c. Calcule la luminancia *B* que corresponde a un diámetro de pupila de 7 mm.

Respuestas:

a. 2.46 mm
b. 0.79 mm y 0.19 mm

$7.73x10^{-6}$ mL

SEMANA 12

16 INECUACIONES

En la teoría del primer elemento de competencia, se definió las relaciones de orden como "mayor que" y "menor que", "mayor o igual que" y "menor o igual que" y vimos cómo interpretarlas en la recta de los números reales.

En este elemento de competencia se resolverán sistemas de inecuaciones

16.1 Inecuaciones lineales

Para resolver inecuaciones lineales, se procede como en las ecuaciones pero se tiene en cuenta que al multiplicar por -1, cambio el signo de la desigualdfad.

Observa el video "Desigualdades lineales - Ejercicio 1", en el cual se explica el proceso para solucionar inecuaciones lineales. (Ríos G, 2014c)

Ejemplo 48: Inecuaciones lineales

a. Resolver la inecuación

$$8x + 4 < 16 + 5x$$

Como se trata de despejar el valor de la x, las pasamos al lado izquierdo de la desigualad

$$8x - 5x < 16 - 4$$

$$3x < 12$$

Dividimos por 3 y simplificamos

$$\frac{3x}{3} < \frac{12}{3}$$

$$x < 4$$

b. $\frac{1}{2} - 3x \leq \frac{5}{2}$

$$-3x \leq \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

$$-3x \leq \frac{4}{2}$$

$$-3x \leq 2$$

$$-\frac{3x}{3} \leq \frac{2}{3}$$

$$-x \leq \frac{2}{3}$$

Como la x quedo negativa, es necesario multiplicar toda la desigualdad por menos 1 y no olvidar cambiar el signo de la desigualdad

$$(-1)\cdot\left(-x \le \frac{2}{3}\right)$$

$$x \ge -\frac{2}{3}$$

c. Resuelva la siguiente inecuación simultánea

$$-7 \le 2x + 1 < 19$$

Como se trata de una inecuación simultánea, se debe dejar la variable en medio de las desigualdades, teniendo en cuenta pasar los términos a cada lado de las desigualdades.

$$-7 - 1 \le 2x + 1 - 1 < 19 - 1$$

$$-8 \le 2x < 18$$

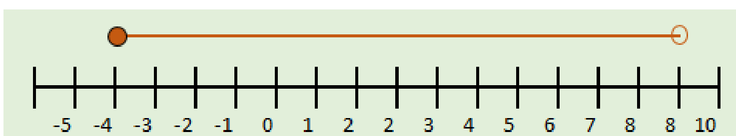
Como el 2 está multiplicando a la x, dividimos toda la desigualdad por 2

$$\frac{-8}{2} \le \frac{2x}{2} < \frac{18}{2}$$

$$-4 \le x < 9$$

Recordemos que el resultado lo podemos expresar en forma de desigualdad y en forma de intervalo.

En forma de intervalo sería: $[-4, 9)$



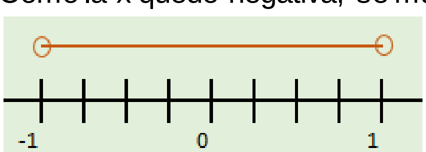
d. $-1 < 1 - 2x < 3$

$$-1 - 1 < 1 - 2x - 1 < 3 - 1$$

$$-2 < -2x < 2$$

$$-1 < -x < 1$$

Como la x quedó negativa, se multiplica toda la desigualdad por -1



$$(-1)\cdot(-1 < -x < 1)$$

$$1 > x > -1$$

Observen el cambio del signo de la desigualdad

e. A la señora Johnson se le pagan $15 000 al año más una comisión de 8% sobre sus ventas.

¿Qué ventas anuales corresponderían a un ingreso anual entre $23 000 y $27 000?

Solución: Sea $x = Ventas$ y 8% $= \frac{8}{100}$

Sabemos que le pagan $15 000 al año más una comisión de 8%

Como el ingreso anual esta entre $23 000 y $27 000, se debe expresar de la siguiente forma

$$23000 \le 15000 + \frac{8}{100}x \le 27000$$

Pasamos el 15000 a cada lado de la desigualdad, con signo contrario

$$23000 - 15000 \leq \frac{8}{100}x \leq 27000 - 15000$$

$$8000 \leq \frac{8}{100}x \leq 12000$$

Para eliminar el factor $\frac{8}{100}$, se debe multiplicar por su inverso, es decir; $\frac{100}{8}$

$$\left(\frac{100}{8}\right)8000 \leq \left(\frac{100}{8}\right)\frac{8}{100}x \leq 12000\left(\frac{100}{8}\right)$$

Simplificamos

$$100000 \leq x \leq 150000$$

Las ventas anuales deben estar entre \$100000 y \$150000, para que las ventas estén entre \$23000 y \$27000

16.2 Inecuaciones con valor absoluto

Para solucionar inecuaciones con valor absoluto, se deben tener en cuenta sus propiedades.

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Si *a* denota un número real positivo, entonces

$$|x| = a \quad sí\ y\ sólo\ sí \ \ x = -a \ \ o \ \ x = 0$$

Se resumen en la siguiente tabla

CASO	MODELO	SOLUCIÓN
1	$\|a\| < b$	$-b < a < b$
2	$\|a\| \leq b$	$-b \leq a \leq b$
3	$\|a\| > b$	$a < -b \ \cup \ a > b$
4	$\|a\| \geq b$	$a \leq -b \ \cup \ a \geq b$

Observa el video "Desigualdades con valor absoluto", en el cual se explican los métodos para solucionar inecuaciones con valor absoluto. (Ríos G, 2017).

Ejemplo 49: Inecuaciones con valor absoluto

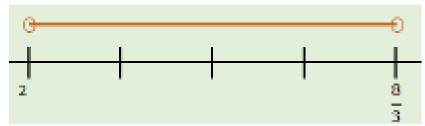
a. $|3x - 7| < 1$

|

Es una inecuación que corresponde al modelo del caso 1

$$-1 < 3x - 7 < 1$$
$$-1 + 7 < 3x < 1 + 7$$
$$6 < 3x < 8$$
$$\frac{6}{3} < x < \frac{8}{3}$$
$$2 < x < \frac{8}{3}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(2, \frac{8}{3})$

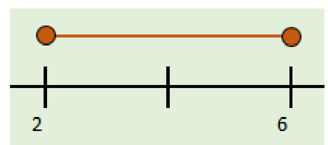


b. $|3x - 6| \leq 12$

Es una inecuación que corresponde al modelo del caso 2

$$-12 \leq 3x - 6 \leq 12$$
$$-12 + 6 \leq 3x \leq 12 + 6$$
$$-6 \leq 3x \leq 18$$
$$-\frac{6}{3} \leq x \leq \frac{18}{3}$$
$$-2 \leq x \leq 6$$

El conjunto solución es el intervalo cerrado $[-2,6]$



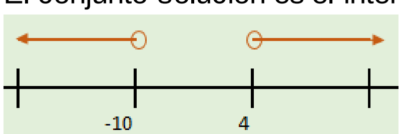
c. $|3 + x| > 7$

Es una inecuación que corresponde al modelo del caso 3

$$3 + x < -7 \;\cup\; 3 + x > 7$$

$$x < -3 - 7 - 3 \;\cup\; x > 7 - 3$$
$$x < -10 \;\cup\; x > 4$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, -10) \cup (4, \infty)$



d. $\left|4 - \frac{1}{2}x\right| \geq 7$

Es una inecuación que corresponde al modelo del caso 4

$4 - \frac{1}{2}x \leq -7 \;\cup\; 4 - \frac{1}{2}x \geq 7$

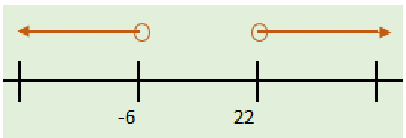
$$-\frac{1}{2}x \leq -7 - 4 \;\cup\; -\frac{1}{2}x \geq 7 - 4$$
$$-\frac{1}{2}x \leq -11 \;\cup\; -\frac{1}{2}x \geq 3$$

$$-x \leq -22 \ \cup \ -x \geq 6$$

Multiplicamos por -1 ambas desigualdades

$$x \geq 22 \ \cup \ x \leq -6$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, -6] \cup [22, \infty)$



Visita la escena interactiva "Inecuaciones", en la cual podrás recordar lo visto hasta el momento sobre solución de inecuaciones racionales y cuadráticas.

16.3 Inecuaciones racionales

Son inecuaciones donde la variable hace parte del numerador y del denominador.

Para solucionar un sistema de inecuaciones racionales, se deben:

- ✓ Se pasan todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad y se realizan las operaciones.
- ✓ Factorizar el numerador y el denominador
- ✓ Buscar los puntos críticos tanto del numerado como del denominar, igualando a cero los factores obtenidos anteriormente.
- ✓ Evaluar los puntos críticos en los intervalos anterior y posterior para determinar que signo tienen los factores en cada intervalo
- ✓ Determinar el conjunto solución, de acuerdo al planteamiento de la inecuación

Observa el video "Desigualdades racionales", en el cual se explica el proceso para solucionar inecuaciones racionales. (Ríos G, 2012).

Ejemplo 50: Inecuaciones racionales

a. $\frac{x+4}{x-2} \geq 3$

$$\frac{x+4}{x-2} - 3 \geq 0$$

$$\frac{(x+4) - 3 \cdot (x-2)}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{x+4-3x+6}{x-2} \geq 0$$

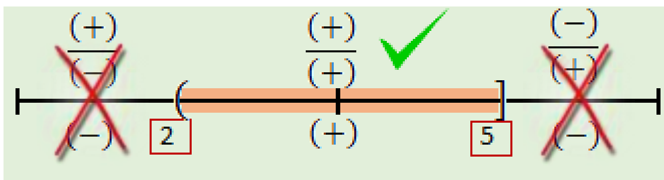
Se suman términos semejantes

$$\frac{-2x+10}{x-2} \geq 0$$

En este caso no se requiere factorizar

$$Puntos\ Críticos \begin{cases} Numerador(N):\ -2x+10=0 \\ Denominador(D):\ x-2=0 \end{cases}$$

$$Puntos\ Críticos \begin{cases} N:\ \ x=5 \\ D:\ x=+2 \end{cases}$$



Como se puede observar, los puntos críticos son el 2 para el denominador el 5 para numerador.

Se debe analizar un valor anterior y posterior al valor crítico para determinar su signo

Para el punto crítico del denominador

$$\frac{-2x+10}{x-2} \geq 0$$

Para $x = 1$

$$\frac{(-2(1)+10)}{((1)-2)} = \frac{(-1+10)}{(1-2)} = \frac{(+9)}{(-1)} = \frac{(+)}{(-)}$$

Sólo nos interesa el signo y como el numerador es positivo $(+)$ y el denominador es negativo $(-)$, el signo es $(-)$ ya que $(+)\cdot(-)=(-)$

$$\frac{(+)}{(-)} = (-)$$

Si observamos, la inecuación nos plantea los valores que hagan que la fracción sea $\geq$ que cero y dado que los números ***negativos*** son ***menores*** que cero, los intervalos $x < 2$ ***no son solución*** para la inecuación.

Para $x = 3$, que es un punto que está comprendido entre el 2 y el 5

$$\frac{(-2(3)+10)}{((3)-2)} = \frac{(-6+10)}{(3-2)} = \frac{(+4)}{(+1)} = \frac{(+)}{(\mp)}$$

Sólo nos interesa el signo y como el numerado es positivo $(+)$ y el denominador es negativo $(+)$, el signo es $(+)$ ya que $(+)\cdot(+)=(+)$

$$\frac{(+)}{(+)}=(+)$$

Como la inecuación nos plantea los valores que hagan que la fracción sea $\geq$ que cero y dado que los números ***positivos*** son ***mayores*** que cero, el intervalo $2<x<5$ ***es solución*** para la inecuación.

De la misma forma se procede con los intervalos mayores que 5 y se determina que son negativos y por tanto no son solución para la inecuación.

El conjunto solución es el intervalo $(-2,5]$, es abierto a la izquierda porque el 2 no se puede incluir, ya que haría el denominador cero y la división por cero es infinita.

b. $1+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x}<0$

Lo primero que se debe hacer es la suma de fraccionarios

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x}<0$$

El mcm es $x\cdot(x+1)$

$$\frac{x\cdot(x+1)+2\cdot(x)-2\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}<0$$

En inecuaciones, no podemos pasar el denominador a multiplicar el cero, cuando este tenga variables (incógnitas), en este caso la x, ya que estaríamos eliminando una restricción de la inecuación.

Realizamos las operaciones indicadas, aplicando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta los cambios de signo.

$$\frac{x^2+x+2x-2x-2}{x\cdot(x+1)}<0$$

Sumamos términos semejantes

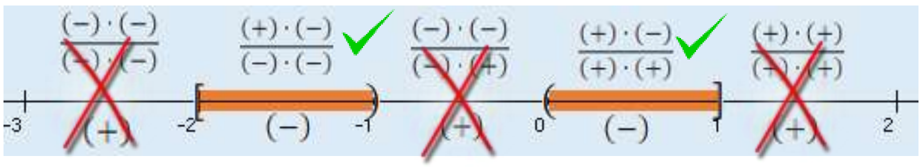
$$\frac{x^2+x-2}{x\cdot(x+1)}<0$$

Factorizamos

$$\frac{(x+2)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+1)}<0$$

$$Puntos\ Críticos\begin{cases}Numerador(N):\ x+2=0\ \ y\ x-1=0\\ \quad Denominador(D):\ x=0\ \ y\ \ x+1\end{cases}$$

$$Puntos\ Críticos\begin{cases}N:\ \ x=-2\ \ y\ \ x=1\\ D:\ \ x=0\ \ y\ \ x=-1\end{cases}$$



El conjunto solución es el intervalo $[-2,-1)\cup(0,1]$

16.4 Inecuaciones cuadráticas

Son inecuaciones con presencia de trinomios de la forma x^2+bx+c o que se solucionan con la utilización de la fórmula general.

Observa el video "Desigualdades cuadráticas", en el cual se explica el proceso para solucionar inecuaciones cuadráticas. (Ríos G, 2014b).

Ejemplo 51: Inecuaciones cuadráticas con radicales

$$\sqrt{4x^2-9x+2}<2x+1$$

Lo primero que se tiene que identificar son las posibles restricciones que se presenten en la inecuación.
En este caso, obsérvese que la inecuación tiene que cumplir con 2 condiciones

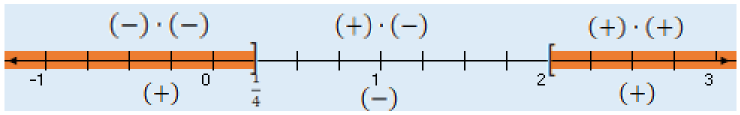
- ✓ Que $4x^2-9x+2\geq 0$, ya que la $\sqrt{Números\ negativos}=Imaginarios\ (i)$ y
- ✓ Que $\sqrt{4x^2-9x+2}<2x+1$

Por lo que tenemos que solucionar las dos restricciones en forma independiente y luego la solución será la intersección entre las dos soluciones.
Para la primera restricción: $4x^2-9x+2\geq 0$

- Lo primero es factorizar $(4x-1)\cdot(x-2)\geq 0$
- Ya tenemos 2 factores, ahora lo que sigue es hallar los valores críticos, igualando a cero y obtener la solución.
- Valores Críticos: $(4x-1)=0$ y $(x-2)=0$

$$4x=1 \qquad\qquad x-2=0$$

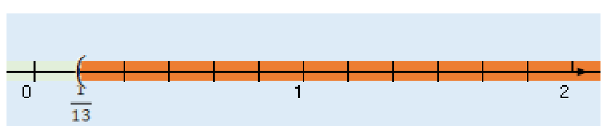
$$x=\frac{1}{4} \qquad\qquad x=2$$



El conjunto solución es el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup [2, \infty)$

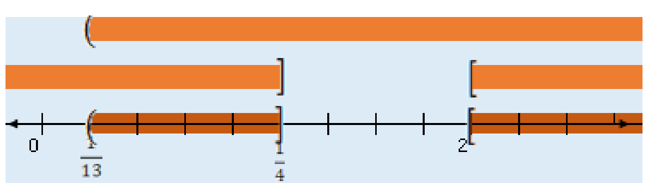
Para la primera restricción: $\sqrt{4x^2 - 9x + 2} < 2x + 1$

- Es necesario eliminar el radical, elevando al cuadrado cada lado de la desigualdad
  $\sqrt{4x^2 - 9x + 2} < 2x + 1$
  $\left(\sqrt{4x^2 - 9x + 2}\right)^2 < (2x + 1)^2$
  En el lado izquierdo de la desigualdad, simplemente se saca del radical y en el lado derecho es el cuadrado de un binomio.
  $4x^2 - 9x + 2 < 4x^2 + 4x + 1$
  Llevamos la desigualdad a cero, pasando los términos del lado derecho al izquierdo
  $4x^2 - 9x + 2 - 4x^2 - 4x - 1 < 0$
  $-13x + 1 < 0$
- Despejamos la x
  $-13x < -1$
  Como la x quedó negativa, multiplicamos toda la desigualdad por menos y cambiamos de signo
  $13x > 1$
  $x > \frac{1}{13}$



El conjunto solución es el intervalo $\left(\frac{1}{13}, \infty\right)$

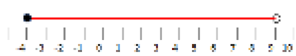
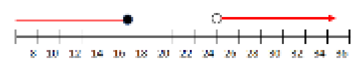
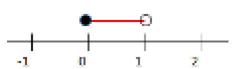
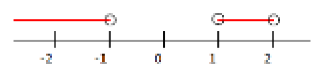
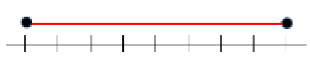
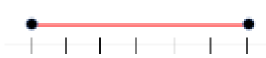
La solución total es la intersección entre los resultados de las dos restricciones



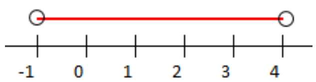
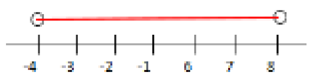
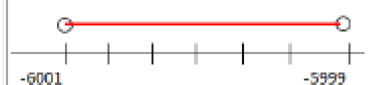
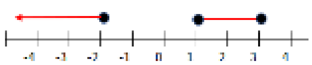
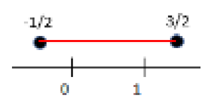
El conjunto solución es el intervalo $\left(\frac{1}{13}, \frac{1}{4}\right] \cup [2, \infty)$

Visita la escena interactiva "Inecuaciones Racionales", en la cual podrás recordar lo visto hasta el momento sobre la solución de inecuaciones racionales y cuadráticas.

Con base en lo estudiado y guiándose con los ejemplos 48 al 51, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $-7 \leq 2x + 1 < 19$	$-4 \leq x < 9 \rightarrow [-4,\ 9)$ 	2. $-3 \leq \frac{4-x}{4} < 7$	$-\infty < x \leq 16 \ \cup \ 24 < x < \infty$  $\rightarrow (-\infty, 16] \cup (24, \infty)$
3. $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$	$0 \leq x < 1 \rightarrow [0,\ 1)$ 	4. $x < \frac{2}{x-1}$	$-\infty < x < -1 \ \cup \ 1 < x < 2$  $\rightarrow (-\infty, -1) \ \cup (1, 2)$
5. $\lvert x \rvert \leq 4$	$-4 \leq x \leq 4 \rightarrow [-4,4]$ 	6. $\lvert 2x \rvert > 7$	$-\infty < x < -\frac{7}{2} \cup \frac{7}{2} < x < \infty$  $\rightarrow \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$
7. $\lvert x - 5 \rvert \leq 3$	$2 \leq x \leq 8 \rightarrow [2,8]$ 	8. $\lvert 2x - 3 \rvert \leq 0.4$	$\frac{13}{10} \leq x \leq \frac{17}{10} \rightarrow \left[\frac{13}{10}, \frac{17}{10}\right]$ 
9. $x^2 - x - 6 < 0$	$-2 < x < 3 \rightarrow (-2,\ 3)$	10. $x^2 - 3x - 18 \leq 0$	$-3 \leq x \leq 6 \rightarrow [-3,6]$

|

Realizar las operaciones indicadas por el método adecuado			
			
11. $3x^2 - 3x < 2x^2 - 4$	$-1 < x < 4 \rightarrow (-1,\ 4)$ 	12. $x^2 > 3(\mathrm{x}+6)$	$-\infty < x < -3\ \cup\ 6 < x < \infty$ $\rightarrow (-\infty, -3)\ \cup (6, \infty\ )$
13. $\lvert \frac{x-2}{3} \rvert < 3$	$-4 < x < 8\ \rightarrow (-4, 8)$ 	14. $\lvert x+6 \rvert < 0.001$	$-6001 < x < -5999$  $\rightarrow (-6001, -5999)$
15. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \leq 0$	$-\infty < x \leq -2\ \cup\ 1 \leq x \leq 3$  $\rightarrow (-\infty, 16-2] \cup [1,3]$	16. $8 - \lvert 2x - 1 \rvert \geq 6$	$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \rightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 

Bienvenidos a seguir ampliando los conocimientos adquiridos hasta el momento. En esta oportunidad, les invito a poner en práctica sus conocimientos sobre operaciones y propiedades de las expresiones algebraicas, resolución de problemas, simplificación de expresiones racionales y factorización.

Así que, los invito a poner en práctica todo lo aprendido y a resolver con éxito los ejercicios propuestos en la "Guía de trabajo independiente UNIDAD 2 – ALGEBRA". ¡Manos a la obra!

BIBLIOGRAFÍA

BALDOR, A. A. (1941). *Álgebra. Cultura Centroamericana, S.A. de C.V. México D.F.* Recuperado de http://www.educando.edu.do/Userfiles/P0001/File/algebrabaldor.pdf

Cayetano R, J. Operaciones de polinomios «con nombre» (2019). Recuperado de https://www.geogebra.org/m/yX4hEedn

García C, M. J. (2017). Libro Interactivo de Aprendizaje: Los números complejos. Recuperado 14 de octubre de 2019, de https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/LibroComplejos-JS/index.html

Khan, S. (2013). *Khanacademy.org: Orígenes del álgebra*. Luisiana, Estados Unidos. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=akS2vnuAol4&feature=youtu.be

Martínez, D. (2019). Adaptación escena interactiva «División de polinomios. Práctica». Mesa C, Marco. Recuperado 10 de octubre de 2019, de https://www.geogebra.org/m/ybfqzdmn

Matematicaula, G. (2019a). Adaptació escena interactiva «Racionalización». Mesa C, Marco. Recuperado 14 de octubre de 2019, de https://www.geogebra.org/m/HnaUjM35

Matematicaula, G. (2019b). Adaptación escena interactiva «Método de Ruffini». Mesa C, Marco. Recuperado 10 de octubre de 2019, de https://www.geogebra.org/m/GNJa64Zc

Ríos G, J. A. (2012). *DESIGUALDADES RACIONALES - Ejercicio 2*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Z_3TR7A24FE

Ríos G, J. A. (2014a). *APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL RESIDUO*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Pv-HtVEHoSI

Ríos G, J. A. (2014b). *DESIGUALDADES CUADRÁTICAS - Ejercicio 3*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=wzV2ZkKhB7A

Ríos G, J. A. (2014c). *DESIGUALDADES LINEALES - Ejercicio 1*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=jSZWvCh2PqI

Ríos G, J. A. (2015). *ECUACIONES EXPONENCIALES - Ejercicio 4*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=6ys1c3DIVNA

Ríos G, J. A. (20158). *ECUACIONES EXPONENCIALES - Ejercicio 3*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=_aZ10GXvUuM

Ríos G, J. A. (2016a). *FACTORIZACIÓN POR EVALUACIÓN (USANDO DIVISIÓN SINTÉTICA) - Ejercicio 1*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=j5AfFpeUBEs&t=1s

Ríos G, J. A. (2016b). *FACTORIZACIÓN POR EVALUACIÓN (USANDO DIVISIÓN SINTÉTICA) - Ejercicio 2*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Sc4E8mGO2Vg

Ríos G, J. A. (2017). *DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO - Casos 2 y 3*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=s_bJlT3WmLc

Rojas H, C. A. (2017). Libro Interactivo de Aprendizaje: Matemáticas Operativas.

Recuperado 14 de octubre de 2019, de https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Matematicas_Basicas-JS/index.html

STEWART, J. (2007). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. 5ª edición, Ed. Thomson Learning*. Recuperado de https://www.academia.edu/15210886/PRECALCULO_5ta_EDICION_JAMES_STEWART_LOTHAR_REDLIN_SALEEM_WATSON

Swokowski, E., & Cole, J. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. *Cengage Learning*. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Zill G, Dennis. Dewar, J. (2012). *Algebra, trigonometría y gemetría analítica. (3ª Ed). Editorial Mc Graw Hill.*