Contenido

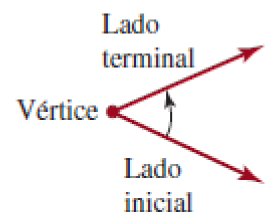
SEMANA 13

TRIGONOMETRIA

La trigonometría es una subdivisión de las matemáticas encargada de calcular los elementos de los diferentes triángulos, estudiando la relación entre sus ángulos y sus lados.

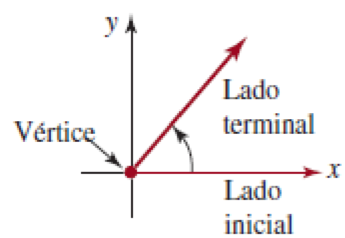
Según Zill, Dennis. (2012), "…Los rudimentos de la trigonometría se remontan al trabajo de matemáticos griegos, egipcios, indios, árabes y chinos. La palabra trigonometría se deriva de dos vocablos griegos: trigon, que significa triángulo, y metro, que significa medida. Por tanto, el nombre trigonometría hace alusión a las diversas relaciones entre los ángulos de un triángulo y sus lados."

1 ÁNGULOS



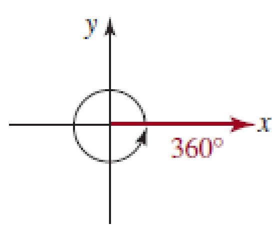
se forma por dos semirrectas que tienen un extremo en común llamado vértice. Una de las semirrectas será el lado inicial y la otra el lado terminal, como se muestra en la figura.

Cuando el ángulo se ubica en el plano cartesiano y tiene como lado inicial el eje positivo de las x, con vértice en el origen, se dice que el ángulo está en posición normal o estándar.



Los ángulos se miden en grados o en radianes, con las siguientes equivalencias.

$$360^o = 2\pi \;\; \rightarrow \;\; 180^o = \pi$$



Ejemplo 1: Conversión de ángulos

a. 210^o a radianes

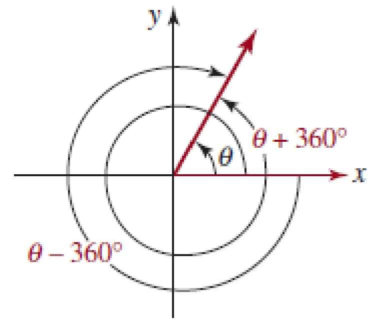
$$21\cancel{0}^o \cdot \frac{\pi}{18\cancel{0}^o} = \frac{21}{18}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

b. $\frac{3}{4}\pi$ a grados

$$\frac{3}{4}\cancel{\pi} \cdot \frac{180^o}{\cancel{\pi}} = 135^o$$

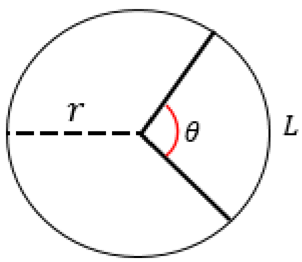
1.1 Ángulos coterminales

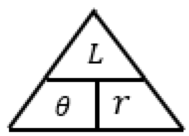
Son aquellos ángulos en posición normal que tienen los mismos lados terminales. Por ejemplo, los ángulos $0^o, 0^o+360^o y\, 0^o-360^o$, los cuales tienen las mismas razones trigonométricas.



1.2 Longitud de arco:

Es el recorrido a lo largo de la curva formada desde la parte final del lado inicial de un ángulo, hasta la parte final de su lado terminal.

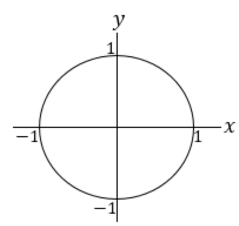




$$L=\theta\cdot r, \qquad \theta=\frac{L}{r}, \qquad r=\frac{L}{\theta}$$

1.3 Circulo Unitario

El circulo unitario se encuentra centrado en el origen, $r=1$. La ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ da origen a la ecuación del circulo unitario, dado que $r=1$, luego dicha ecuación será: $x^2+y^2=1$.



Ejemplo 2: Puntos en el círculo unitario

a. Demuestre que el punto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, pertenece al círculo unitario.

Las coordenadas de un punto en el plano cartesiano, están determinadas por el par ordenado P (x, y).

Para que el punto P (x, y), pertenezca al círculo unitario tiene que cumplir con la ecuación del círculo unitario $x^2+y^2=1$, luego:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=1$$

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3^2}+\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{3^2}=1$$

$$\frac{3}{9}+\frac{6}{9}=1$$

Observen que ha quedado una suma de fraccionarios homogéneos.

$$\frac{3+6}{9}=1$$

$$\frac{9}{9} = 1$$
$$1 = 1$$

Con el resultado anterior, podemos afirmar que el punto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, pertenece al círculo unitario.

b. El punto $P\left(x\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ pertenece al círculo unitario, encuentre la coordenada faltante.

$$(x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$
$$x^2 + \frac{1}{4} = 1$$

Despejamos la x,

$$x^2 = 1 - \frac{1}{4}$$
$$x^2 = \frac{4}{4} - \frac{1}{4}$$
$$x^2 = \frac{3}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nota: El signo $\pm$ indica la existencia de dos puntos que pertenecen al círculo unitario, $P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ ubicado en el primer (I) cuadrante y que el punto $P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$, ubicado en el segundo (II) cuadrante.

Antes de estudiar lo que son ángulos complementarios y suplementarios, visita la escena interactiva de la página 353 del libro interactivo "Matemáticas Operativas", para que interactúes, moviendo el deslizador para cada tipo de ángulos y establezcas la diferencia entre ellos.

1.4 Ángulos Complementarios

Son aquellos que sumados son iguales al valor del ángulo de 90^o, es decir; el ángulo complementario de 30^o, será el de 60^o, dado que: $90^o - 30^o = 60^o$

$$\acute{A}ngulo\ COMPLEMENTARIO = 90^o - \theta$$

Por lo tanto, los ángulos internos de cualquier triángulo suman 180^o.

Ejemplo 3: Hallar los ángulos complementarios de $17^o, 27^o, 53^o, 78^o$

a. $\acute{A}ngulo\ COMPLEMENTARIO\ de\ 17^o = 90^o - 17^o = 73^o$
b. $\acute{A}ngulo\ COMPLEMENTARIO\ de\ 27^o = 90^o - 27^o = 63^o$
c. $\acute{A}ngulo\ COMPLEMENTARIO\ de\ 53^o = 90^o - 53^o = 37^o$
d. $\acute{A}ngulo\ COMPLEMENTARIO\ de\ 78^o = 90^o - 78^o = 12^o$

1.5 Ángulos Suplementarios

Son aquellos que sumados son iguales al ángulo llano (180^o) , es decir; el ángulo suplementario de 135^o, será el de 45^o, dado que: $180^o - 135 = 45$

$$\acute{A}ngulo\ SUPLEMENTARIO = 180^o - \theta$$

Ejemplo 4: Hallar los ángulos suplementarios de $30^o, 78^o, 120^o, 135^o$

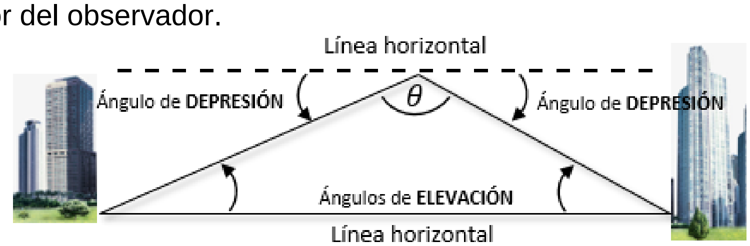
a. $\acute{A}ngulo\ SUPLEMENTARIO\ de\ 30^o = 180^o - 30^o = 150^o$
b. $\acute{A}ngulo\ SUPLEMENTARIO\ de\ 78^o = 180^o - 78^o = 102^o$
c. $\acute{A}ngulo\ SUPLEMENTARIO\ de\ 120^o = 180^o - 120^o = 60^o$
d. $\acute{A}ngulo\ SUPLEMENTARIO\ de\ 135^o = 180^o - 135^o = 45^o$

Visita la escena interactiva de la página 353 del libro interactivo “Matemáticas Operativas”, para que interactúes, moviendo el deslizador para cada tipo de ángulo y establece la diferencia entre ellos. Comprueba las respuestas presentadas en los literales a, b, c, y d de los ejemplos 3 y 4.

Observa detenidamente el video “Ángulos complementarios y suplementarios”, en el cual se explica cómo se obtienen los ángulos complementarios y suplementarios. (Martín R, 2013)

1.6 Ángulos de ELEVACIÓN y DEPRESIÓN

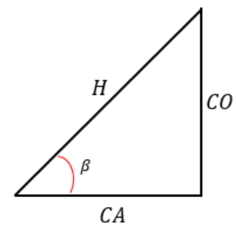
Ángulo de **ELEVACIÓN**: Es el ángulo desde la horizontal hacia un objeto que está en la parte de superior del observador.



Ángulo de **DEPRESIÓN**: Es el ángulo desde la horizontal hacia un objeto que está en la parte de inferior del observador.

Visita la escena interactiva de la página 354 del libro interactivo “Matemáticas Operativas”, para que observes lo que es un ángulo de depresión.

2 TEOREMA DE PITÁGORAS



Establece que, en todo triángulo rectángulo, la Hipotenusa (H) al cuadrado esa igual a la suma de los cuadrados de sus lados (Opuesto y Adyacente). Para recordar, la Hipotenusa (H), es el lado del triángulo ubicado al frente (opuesto) al ángulo recto (90^o).
Siendo así, $H^2 = CO^2 + CA^2$.

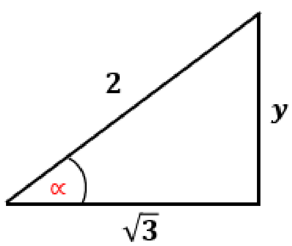
Ejemplo 5: Teorema de Pitágoras

En la escena interactiva de la página 356 del libro interactivo "Matemáticas Operativas", podrás analizar la definición del teorema de Pitágoras, desplazando el ponto "A", en dirección vertical o el punto "C" en dirección horizontal, observando el comportamiento de las áreas de los polígonos que rodean el triángulo rectángulo y la definición propia del teorema.

a. Hallar el lado opuesta "y", del triángulo rectángulo cuyo lado adyacente es $\sqrt{3}$ y la hipotenusa es 2.

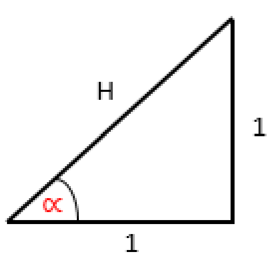
   Lo primero que se debe hacer es construir el dibujo de lo que se plantea en el ejercicio.

Por el teorema de Pitágoras $H^2 = CO^2 + CA^2$, luego:



$$2^2 = y^2 + (\sqrt{3})^2$$
$$4 = y^2 + 3$$
$$4 - 3 = y^2$$
$$y = \pm\sqrt{1}$$
$$y = \pm 1$$

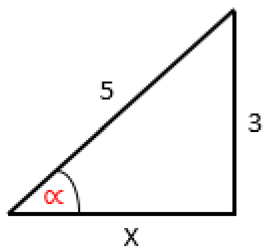
b. Hallar la hipotenusa "H", del triángulo rectángulo cuyo lado opuesto 1 y el adyacente es 1.



Por el teorema de Pitágoras $H^2 = CO^2 + CA^2$, luego:

$$H^2 = 1^2 + 1^2$$
$$H^2 = 1 + 1$$
$$H^2 = 2$$
$$H = \pm\sqrt{2}$$

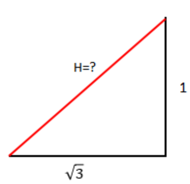
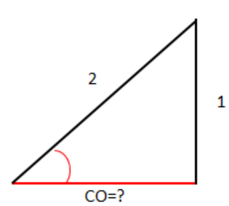
c. Hallar el lado adyacente "X", del triángulo rectángulo cuyo lado opuesto 3 y la hipotenusa es 5.

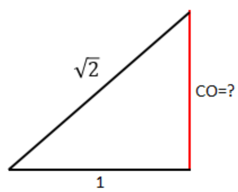
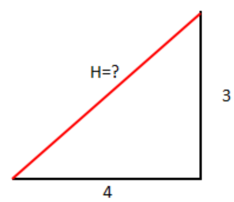
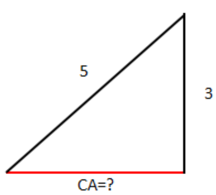
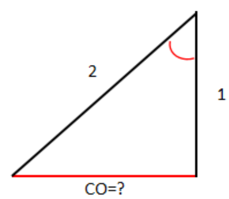


Por el teorema de Pitágoras $H^2 = CO^2 + CA^2$, luego:

$5^2 = 3^2 + X^2$
$25 = 9 + X^2$
$25 - 9 = X^2$
$X = \pm\sqrt{16}$
$X = \pm 4$

Con base en lo estudiado, con lo que observaste en el video "Ángulos complementarios y suplementarios", así como lo analizado en las escenas interactivas del "Discurso de trigonometría", y guiándose con los ejemplos 1 al 5, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Demuestre que los puntos pertenecen al círculo unitario, halle las coordenadas faltantes o complete los triángulos rectángulos			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$	Pertenece	2. $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$	
3. $\left(\frac{7}{25}, -\frac{24}{25}\right)$		4. $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$	
5. $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$		6. $\left(\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}\right)$	
7. $P\left(-\frac{3}{5},\quad\right)$, Cuadrante III		8. $P\left(\quad, -\frac{7}{25}\right)$, Cuadrante IV	
9. $P\left(\quad, -\frac{1}{3}\right)$, Cuadrante II		10. $P\left(\frac{2}{5},\quad\right)$, Cuadrante I	
11. 	$H = 2$	12. 	$CA = \sqrt{3}$

Demuestre que los puntos pertenecen al círculo unitario, halle las coordenadas faltantes o complete los triángulos rectángulos			
13. 	$CO = 1$	14. 	$H = 5$
15. 	$CA = 4$	16. 	$CO = \sqrt{3}$

3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Se definen comúnmente como el cociente entre los lados del triángulo o el cociente entre sus lados y la hipotenusa, asociados al ángulo que forman, la relación existente se muestra en la siguiente imagen.

Visita la escena interactiva "Ubicando los lados de un triángulo rectángulo" del libro interactivo "Matemáticas Operativas", en la cual podrás interactuar y familiarizarte con los lados de los triángulos rectángulos, dependiendo del ángulo agudo que elijas.

$$S\frac{O}{H}\ C\frac{A}{H}\ T\frac{O}{A}$$

Observa el video "Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo", en el cual se explica la razón existente entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulos, así como el teorema de Pitágoras. (Ortega L, 2014)

Las razones trigonométricas del ángulo θ en un triángulo rectángulo son:

$$Sen\ \theta = \frac{CO}{H} \qquad Csc\ \theta = \frac{H}{CO}$$

$$Cos\ \theta = \frac{CA}{H} \qquad Sec\ \theta = \frac{H}{CA}$$

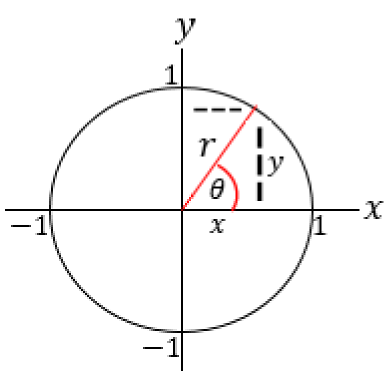
$$Tan\ \theta = \frac{CO}{AD} \qquad Cot\ \theta = \frac{CA}{CO}$$

Otra forma de recordarlo, es utilizando la sigla **S**O**C**A**T**OA:

En la cual:
$\boldsymbol{S} = Sen\ \theta$
$\boldsymbol{C} = Cos\ \theta$
$\boldsymbol{T} = Tan\ \theta$
$O = Cateto\ Opuesto\ (op)$
$A = Cateto\ Adyacente\ (ady)$
$H = Hipotenusa\ (hip)$

$$S\,\frac{O}{H}\;C\,\frac{A}{H}\;T\,\frac{O}{A}$$

Teniendo en cuenta la definición del circulo unitario $r = 1$ y analizando su gráfica con relación a la definición de las razones trigonométricas del cuadro anterior, podemos concluir que:



$$Sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$Cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

Por lo que podemos concluir que siempre que se hable de la función Seno, la relacionamos con las "y" y cuando se hable de la función Coseno, la relacionamos con las "x".
Si calculamos la función trigonométrica de la tangente, obtenemos: $Tan\theta = \frac{y}{x}$, por lo que podemos concluir que

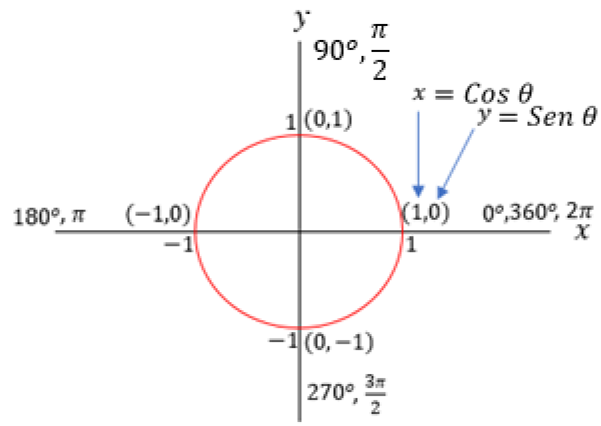
$$\text{Tan}\ \theta = \frac{Sen\theta}{Cos\theta}$$

3.1 Razones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Son aquellos ángulos que su lado terminal coincide con los ejes coordenados. Recordemos que un par ordenado tiene componentes en los ejes *x* e *y* (*x*, *y*), y que los ángulos cuadrantales son $0^o, 90^o, 180^o, 270^o, 360^o$ así como todos los que se formen sobre los ejes al girar *n-vueltas.*

Visita la escena interactiva "Círculo unitario" de la página 364 del libro interactivo "Matemáticas Operativas" y utiliza las teclas de desplazamiento "izquierda o derecha", para que ubiques los ángulos cuadrantales de $0^o, 90^o, 180^o, 270^o, 360^o$ y observa que coinciden con las coordenadas del punto $\text{P}(\text{x}, \text{y})$ de cada ángulo.

Razón trigonométrica	Vr.	*Razón trigonométrica*	Vr.
$Sen\ 0^o =$	0	$Csc\ 0^o =$	∞
$Cos\ 0^o =$	1	$Sec\ 0^o =$	1
$Tan\ 0^o =$	0	$Cot\ 0^o =$	∞

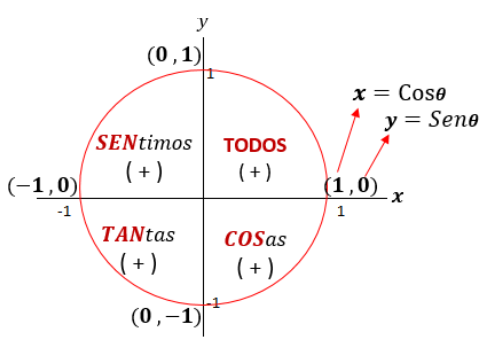


Las funciones $Csc\ 0^o$ y $Cot\ 0^o$, son ∞ , dado que $Csc\ 0^o = \frac{1}{Sen\ 0^o}$ y $Cot\ 0^o = \frac{1}{Tan\ 0^o}$ por lo que la división por cero infinito.

Nota: Como actividad de trabajo individual, pueden calcular las funciones trigonométricas de los demás ángulos cuadrantales.

3.2 Signos de las razones trigonométricas

Siempre que se hable de Coseno, pensamos en la coordenada (abscisa) x, ya que $x = Cos\theta$ y cuando se hable de Seno, se piensa en la coordenada (ordenada) y, debido a que $y = Sen\theta$.



Teniendo en cuenta lo anterior, podemos tomar como referencia la siguiente gráfica, ya que la “x” y la “y” son positivas (+) en el primer cuadrante, por tanto, las funciones trigonométricas de todos los ángulos que se encuentren en este cuadrante, también lo serán.

Así mismo, en el segundo cuadrante sólo el eje “y”, es positivo (+) y como ya se dijo, la “$y = Sen\theta$", por tanta la función $Sen\theta$, es la única positiva, las demás son negativas.

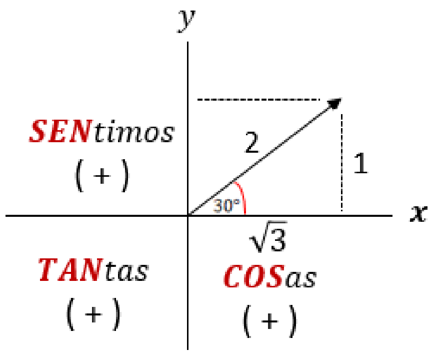
De la misma manera se puede analizar los signos de las funciones trigonométricas en el tercer y cuarto cuadrante, sien do la tangente positiva (+) en el tercer (III) cuadrante y el coseno positivo (+) en el cuarto (IV).

Ejemplo 6: Hallar el Seno, Coseno y Tangente para los siguientes ángulos

a. $30°$
b. $135°$
c. $240°$
d. $330°$

Solución:

a. Observa que el ángulo de $30°$, se encuentra en el primer (I) cuadrante.



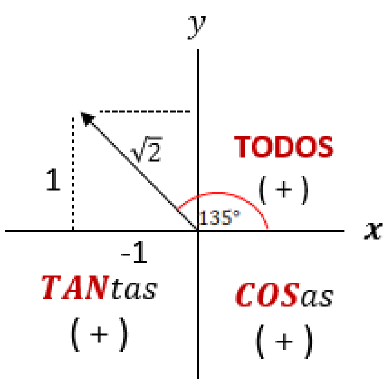
Según lo visto en el título anterior, en el primer cuadrante TODAS las funciones trigonométricas son positivas (+)

$$Sen30° = \frac{CO}{H} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$Cos30° = \frac{CA}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

$$Tan30° = \frac{CO}{CA} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{Sen30°}{Cos30°} = \frac{0.5}{0.86} = 0.577$$

b. Observa que el ángulo de $135°$, se encuentra en el segundo (II) cuadrante, por lo que sólo la función Seno es positiva (+), las demás son negativas.

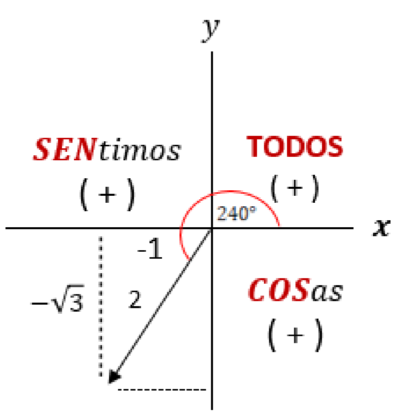


$$Sen135° = \frac{CO}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$Cos135° = \frac{CA}{H} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -0.707$$

$$Tan135° = \frac{CO}{CA} = \frac{1}{-1} = \frac{Sen135°}{Cos135°} = \frac{0.707}{-0.707} = -1$$

c. Observa que el ángulo de $240°$, se encuentra en el tercer (III) cuadrante, por lo que sólo la función Tangente es positiva (+), las demás son negativas.

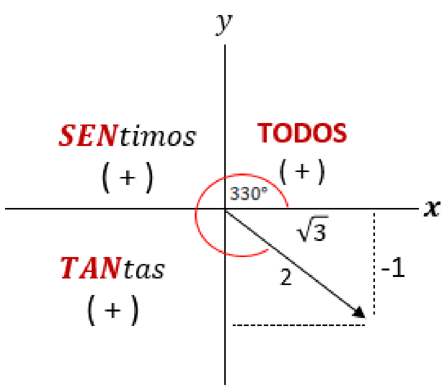


$$Sen240° = \frac{CO}{H} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -0.866$$

$$Cos240° = \frac{CA}{H} = \frac{-1}{2} = -0.5$$

$$Tan240° = \frac{CO}{CA} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \frac{Sen135°}{Cos135°} = \frac{-0.866}{-0.5} = 1.732$$

d. Observa que el ángulo de $330°$, se encuentra en el cuarto (VI) cuadrante, por lo que sólo la función Coseno es positiva (+), las demás son negativas.



$$Sen330° = \frac{CO}{H} = \frac{-1}{2} = -0.5$$

$$Cos330° = \frac{CA}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

$$Tan330° = \frac{CO}{CA} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{Sen135°}{Cos135°} = \frac{-0.5}{0.866} = -0.577$$

3.3 Ángulo de referencia

Es el ángulo agudo que representa un ángulo de cualquier medida, con los signos del cuadrante correspondiente.
El ejemplo 4, en los literales a, b, c y d nos hace pensar en un ángulo de referencia, es decir; encontrar un ángulo equivalente en el primer cuadrante, para ángulos en el II, III y IV cuadrante.
Para el literal b, del ejemplo 4 el ángulo de referencia sería:

Nota: Se recomienda que se tome como referente el ángulo que se forme con el eje de las abscisas (x).

En la escena interactiva "Ángulos equivalentes y signos de las razones trigonométricas", de la página 366 del libro interactivo "Matemáticas Operativas", podrás encontrar los ángulos equivalentes para los ángulos agudos que ingreses en la casilla de entrada α.

Ejemplo 7: Hallar los ángulos de referencia de $135°$, $240°$ y $330°$

a. $135°$ está en el segundo cuadrante, lo que quiere decir que se toma como referente el ángulo llano $(180°)$

   $180° - 135° = 45°$, ángulo de referencia para el primer (I) cuadrante es $45°$, significa que las funciones trigonométricas de $135°$ son las mismas del ángulo de $45°$, pero con los signos del segundo (II) cuadrante.

b. $240°$ está en el tercer (III) cuadrante, observa que esta después del ángulo llano $(180°)$, por lo tanto, para hallar el ángulo de referencia para el primer (I) cuadrante, se le debe restar $(180°)$ al ángulo dado.

   $240° - 180° = 60°$

c. $330°$ está en el tercer (IV) cuadrante, observa que esta antes del ángulo de $360°$, por lo tanto, para hallar el ángulo de referencia para el primer (I) cuadrante, se le debe restar a $360°$ al ángulo dado.

$360° - 330° = 30°$

NOTA: No pueden olvidar que se buscan las razones trigonométricas del ángulo de referencia, pero con los signos del cuadrante al que corresponde al ángulo que dieron inicialmente.

3.4 Razones trigonométricas de ángulos notables

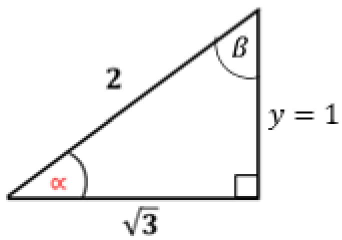
Ángulo		Seno	Coseno	
0^o	**0**	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	**4**	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
30^o	**1**	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	**3**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45^o	**2**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60^o	**3**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
90^o	**4**	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	**0**	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

En la escena interactiva de la página 373 del libro interactivo de “Matemáticas Operativas”, podrás aprender a calcular las razones trigonométricas de los ángulos notables "con la mano", numera los dedos desde el dedo meñique, iniciando en cero, hasta el dedo pulgar que sería el 4 y representa $90°$. Interactúa, desplazando el deslizador a la izquierda o derecha (puedes utilizar las teclas de desplazamiento “izquierda o derecha”).

La escena interactiva “Tour trigonométrico”, te permitirá hacer un recorrido por las gráficas del seno, coseno y tangente y encontrarás las razones trigonométricas de los ángulos cuadrantales y los ángulos notables. (Phet.colorado.edu, 2019)

Ejemplo 8: Usando las razones trigonométricas, hallar los ángulos internos (en el primer cuadrante) de los triángulos del ejemplo 3.

a. Recordemos que la hipotenusa “y” encontrado en el ejemplo, era y=1, en el primer (I) cuadrante.



Dado que se conocen todos los lados del triángulo rectángulo (H, CA y CO), puedes utilizar una de las 6 funciones trigonométricas (se recomienda Seno, Coseno o Tangente). Para este ejemplo en particular se utilizarán las tres para que lo puedas comprobar y practicar lo aprendido.

$$Sen\alpha = \frac{CO}{H} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Ahora: $\alpha = Sen^{-1}(0.5) = 30°$

$$Cos\alpha = \frac{CA}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

$$\alpha = Cos^{-1}(0.866) = 30°$$

$$Tan\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$$

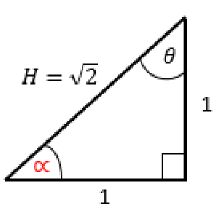
$$\alpha = Tan^{-1}(0.577) = 30°$$

Para hallar el ángulo β, puedes utilizar las funciones trigonométricas o para mayor facilidad hacer uso de los ángulos complementarios. Recuerda que:

$$\acute{A}ngulo\ COMPLEMENTARIO = 90^{o} - \theta$$

$\beta = 90° - 30° = 60°.$

b. Para este ejemplo sólo se utilizará la función $Sen\theta$ y por medio ángulos complementarios se hallará el valor del ángulo α.

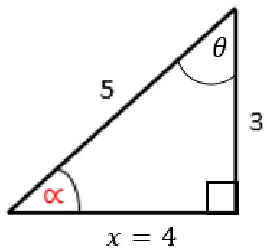


$$Sen\theta = \frac{CO}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\theta = Sen^{-1}(0.707) = 45°$$

$$\alpha = 90° - 45° = 45°$$

c.



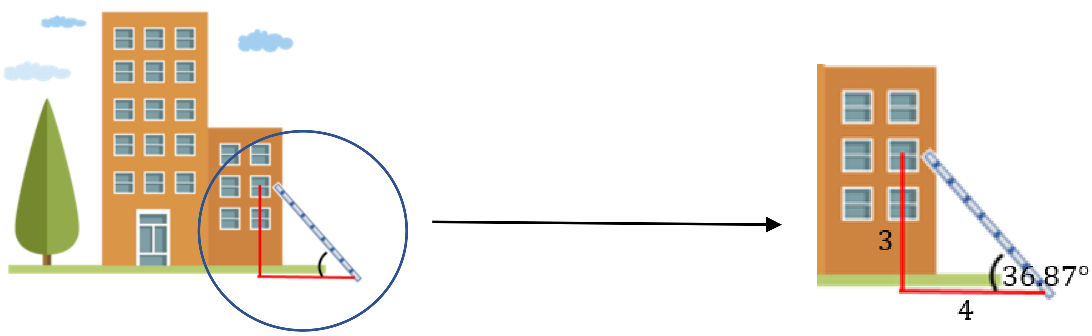
$$Sen\alpha = \frac{CO}{H} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\theta = Sen^{-1}(0.6) = 36.87°$$

$$\alpha = 90° - 36.87° = 53.130°$$

Ejemplo 9: Una persona vive en un apartamento en un segundo piso y olvida las llaves, si la altura del piso de la base del edificio a la ventana es de 3 metros y se ubica a una distancia de 4 metros de la base, formando un ángulo de $36.87°$ de elevación, ¿cuánto debe medir la escalera para poder subir por las llaves?

Solución:



Para solucionar ejercicios de este tipo, puedes utilizar el teorema de Pitágoras o las funciones trigonométricas.
Por Pitágoras: $H^2 = CO^2 + CA^2$

$$H^2 = 3^2 + 4^2$$
$$H^2 = 9 + 16$$
$$H^2 = 25$$
$$H = \pm\sqrt{25}$$
$$H = \pm 5$$

Para efectos de la respuesta, sólo es válida la respuesta positiva (+)

Por funciones trigonométricas: Podemos utilizar alguna de las funciones trigonométricas que involucren la hipotenusa (H).

$$Sen\ (36.87°) = \frac{CO}{H} = \frac{3}{H}$$

$$Sen\ (36.87°) = \frac{3}{H}$$
$$(H)Sen\ (36.87°) = 3$$

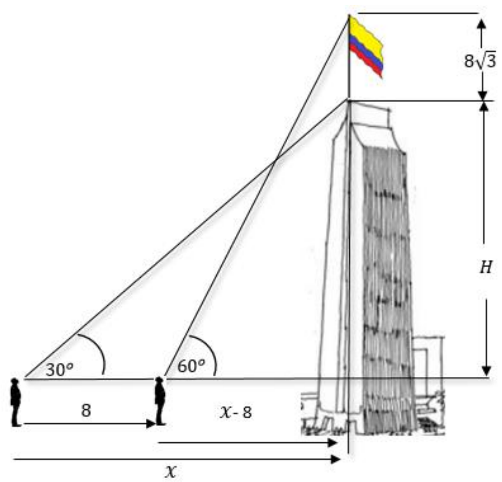
$$H = \frac{3}{Sen\ (36.87°)}$$

$$H = \frac{3}{0.6}$$

$$H = 5$$

Ejemplo 10: Una persona de aproximadamente $\sqrt{3}$ metros de estatura, mira la parte superior de un edificio, con un ángulo de elevación de $30°$ y si se acerca 8 metros a la base del edificio y mira la parte superior de una bandera que se encuentra sobre el edificio, el ángulo de elevación será de $60°$. Si se sabe que la asta de la bandera mide $8\sqrt{3}$ metros, Determinar:

a. La distancia inicial entre la persona y la base del edificio. R/. 24 metros.
b. La altura del edificio. R/. $9\sqrt{3}$ metros



Solución: Lo primero y bien importante, es hacer una gráfica de lo que nos están planteando.

Se deben plantear ecuaciones que involucren los lados que nos están pidiendo, por lo que la más conveniente es la $Tan\ 30°$ y $Tan\ 60°$

$$Tan\ 30° = \frac{H}{x} \quad (1)$$

$$Tan\ 60° = \frac{H + 8\sqrt{3}}{x - 8} \quad (2)$$

Ahora reemplazamos los valores que se puedan, por el momento la tangente de los ángulos. Se recomienda dejar los valores indicados.

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{H}{x}$ (1), despejamos la "x" o la "H". En este ejemplo es más fácil despejar la "x" en la ecuación (1) y (2).

$$x = \sqrt{3}H \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{H + 8\sqrt{3}}{x - 8} \quad (2)$$

$$x - 8 = \frac{H + 8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$x = \frac{H + 8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 8 \quad (2)$$

Ahora podemos igualar la “x” de la ecuación (1) y (2)

$$\sqrt{3}H = \frac{H + 8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 8$$

$$3H = H + 8\sqrt{3} + \ 8\sqrt{3}$$

$$2H = 16\sqrt{3}$$

$$H = 8\sqrt{3}$$

Conociendo la “H”, podemos encontrar la “x”, reemplazando en la ecuación (1) o (2)

$$x = \sqrt{3}H \quad (1)$$

$$x = \sqrt{3}\left(8\sqrt{3}\right)$$

$$x = 24$$

La altura total del edificio es igual a la suma de la estatura de la persona, más la “H” encontrada.

$$Altura\ Edificio = \ \sqrt{3} + 8\sqrt{3}$$

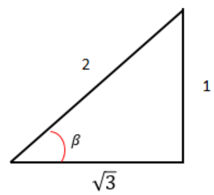
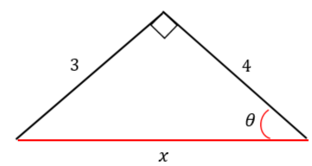
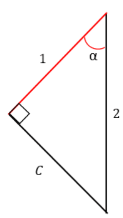
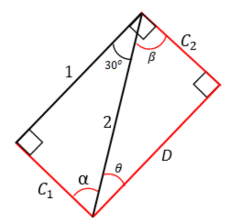
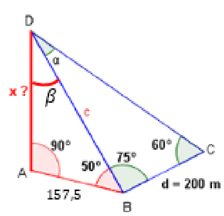
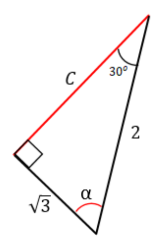
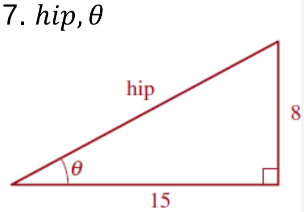
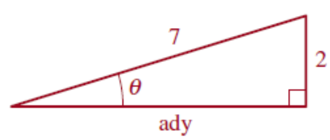
$$Altura\ Edificio = \ 9\sqrt{3}$$

El video “Problema 3 de trigonometría en triángulos rectángulos”, te servirá para facilitar el entendimiento de la aplicación de las razones trigonométricas en la solución de problemas en contexto. (Ríos G, 2012c)

Con base en lo estudiado y guiándose con los ejemplos 6 al 10, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Utiliza el método adecuado para resolver los siguientes ejercicios			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $\mathrm{Sen}\,\beta$, $\mathrm{Cos}\,\beta$	$\beta = 30^o$ $\mathrm{Sen}\,\beta = \frac{1}{2}$	2. $\mathrm{Sen}\,\theta$, $\mathrm{Cos}\,\theta$, $Tan\,\theta$, $\mathrm{Cot}\,\theta$, $\mathrm{Sec}\,\theta$,	$x = 5$ $\theta \sim 37^o$ $\mathrm{Sen}\,\theta = {}^{3}/{}_{5}$

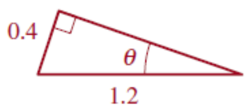
Utiliza el método adecuado para resolver los siguientes ejercicios

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
	$\text{Cos}\,\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$		$\text{Cos}\,\theta = {}^{4}/_{5}$ $Tan\,\theta = {}^{3}/_{4}$ $\text{Cot}\,\theta = {}^{4}/_{3}$ $\text{Sec}\,\theta = {}^{5}/_{4}$ $Csc\,\theta = {}^{5}/_{3}$
3. $C, \alpha, \text{Sen}\,\alpha, \text{Cos}\,\alpha, Tan\,\alpha$ 	$\text{C} = \sqrt{3}$ $\alpha = 60^o$ $\text{Sen}\,\alpha = {}^{\sqrt{3}}/_{2}$ $\text{Cos}\,\alpha = {}^{1}/_{2}$ $Tan\,\alpha = \sqrt{3}$	4. $C_1, C_2, D, \alpha, \beta, \theta$ 	$C_1 = 1$ $C_2 = 1$ $D = \sqrt{3}$ $\alpha = 60^o$ $\theta = 30^o$
5. x, α, β, c 	$x = 187.7$ $\alpha = 45^o$ $\beta = 40^o$ $c = 245$	6 $.\alpha, C$ 	$\alpha = 60^o$ $C = 1$
7. hip, θ 	$hip = 17$ $\theta = 28^o$	8. θ, ady 	$\theta = 16.6$ $ady = 3\sqrt{5}$

Utiliza el método adecuado para resolver los siguientes ejercicios

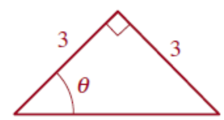
Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
9. θ	$\theta = 19.47$	10. θ	$\theta = 45^o$

9. θ



$\theta = 19.47$

10. θ

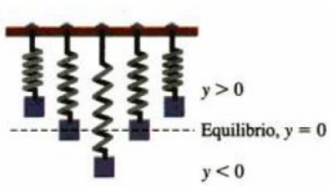


$\theta = 45^o$

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta

11.**Movimiento armónico**: El desplazamiento desde el equilibrio de una masaoscilante unida a un resorte es $y(t) = 4Cos3\pi t$, donde "y" se mide en pulgadas y "t" en segundos. Calcule el desplazamiento en los tiempos indicados en la tabla.

t	$y(t)$
0	
0.25	
0.50	
0.75	
1.00	
1.25	



R/.

t	$y(t)$
0,00	4,00
0,25	-2,83
0,50	0,00
0,75	2,83
1,00	-4,00
1,25	2,83

12. Ritmos cardiácos: La presión sanguínea del hombre varía a lo largo del día. En una cierta persona, la presión sanguínea diastólica en reposo en el tiempo *t* se obtiene mediante $B(t) = 80 + 7Sen(\frac{\pi t}{12})$, donde *t* se mide en horas a partir de la media noche y *B(t)* en milímetros de mercurio (mmHg). Calcule la presión sanguímea diastólica de esa persona.

a. a las 6:00 am
b. a las 10;30 am
c. al medio día
d. a las 8:00 pm

Respuestas:

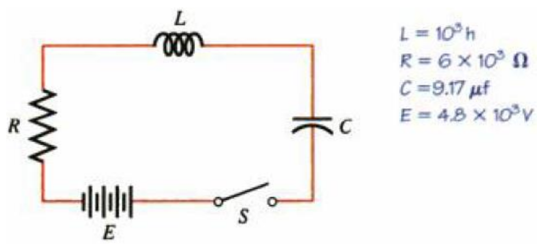
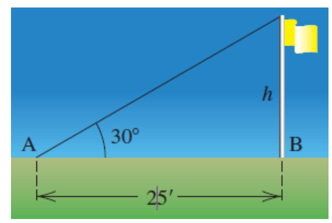
a. $B(6) = 87\ mmHg$
b. $B(10:30) = 82.68\ mmHg$
c. $B(12) = 80\ mmHg$
d. $B(20) = 73.94\ mmHg$

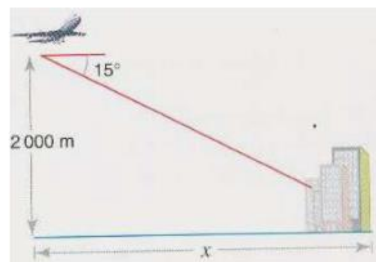
13. **Circuito eléctrico:** Después de que se cierra el interruptor en el circuito mostrado, la corriente t segundos más tarde es $I(t) = 0.8\,e^{-3t}Sen(10t)$. Calcule la corriente en los tiempos:

a. *t* =0.1 s

b. *t* = 0.5 s

14. Un topógrafo observa que en un punto A, situado al nivel del suelo a una distancia de 25.0 pies de la base B de un asta de bandera, el ángulo entre el suelo y el extremo superior del poste es de 30^o. Calcule la altura *h* del poste al décimo de pie más cercano.

Utiliza el método adecuado para resolver los siguientes ejercicios			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
 Respuesta: a. 0.0103 0.0155		 R/. $\frac{25}{3}\sqrt{3}$	
15. Calcular la altura de una antena de radio si su sombra mide 100 m cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 30º con la horizontal R/. 57.74 m.		16. Determinar la distancia y la altura de un castillo que se encuentra situado en la orilla opuesta de un río, sabiendo que la torre más alta del mismo se ve desde nuestra orilla bajo un ángulo de 60º y alejándonos 100 m del río el ángulo es de 30º. R/. Distancia =150 m Altura = $50\sqrt{3}$ m	
17. Desde un cierto punto del terreno se mira a lo alto de una montaña y la visual forma un ángulo de 60º con el suelo. Al alejarse 200 m de la montaña, la visual forma 30º con el suelo. Halla la altura, h, de la montaña. R/. Distancia =300m Altura = $100\sqrt{3}$ m		18.Desde un barco se ve el punto más alto de un acantilado con un ángulo de 45º. Sabiendo que la altura del acantilado es de 200 m, ¿a qué distancia se encuentra el barco del pie del acantilado? R/. Distancia =200m	
19. Una persona de aproximadamente $\sqrt{3}$ mts de altura, observa la parte superios de un edificio, con un ángulo de elevación de		20. El piloto de un avión que vuela a 2000 m de altura divisa la ciudad de destino con un ángulo	

Utiliza el método adecuado para resolver los siguientes ejercicios			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
30º, si se acerca 8 mts hacia su base, el ángulo de elevación será de 60º. Calcular la distancia inicial hasta la base del edificio y su respectiva alatura. R/. Distancia =12m Altura = $5\sqrt{3}$ m		de depresión de 15º. A qué distancia está esa ciudad?.  R/. Distancia =7464.10 m	

4 TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

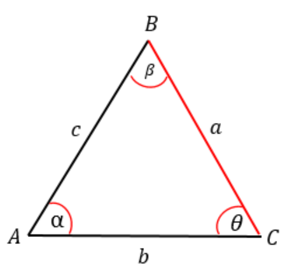
Son aquellos triángulos en los que ninguno de sus ángulos es recto, por lo que no se pueden resolver utilizando las identidades Pitagóricas y las identidades trigonométricas.
Para la solución de triángulos oblicuángulos en ejercicios propuestos en este contexto, se debe hacer uso de la **Ley del seno** y de la Ley **del Coseno.**

Observa el video "Ley de Seno y Coseno | Ejemplo 1 | Solucionar el triángulo", en el cual se explica la un ejemplo donde se puede aplicar la ley del seno y la ley del coseno. (Profe, 2017)

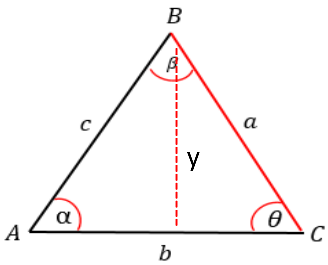
4.1 Ley del seno

Esta ley, establece la relación existente entre un ángulo determinado y su lado opuesto.

$$\frac{a}{Sen\alpha} = \frac{b}{Sen\beta} = \frac{c}{Sen\theta}$$



Como los ángulos $\alpha, \beta\ y\ \theta$, no son rectos; es necesarios tratar de obtener ángulos rectos en el triángulo ABC
Par ello, se trazará una línea imaginaria desde la mitad del lado *b* hasta el vértice *B.*



Ahora,

$Sen\ \alpha = \frac{y}{c}$, despejando y, $c \cdot Sen\ \alpha = y$

$Sen\ \theta = \frac{y}{a}$, despenado y, $a \cdot Sen\ \theta = y$

Igualamos

$$a \cdot Sen\ \theta = c \cdot Sen\ \alpha$$

Lo que equivale a:

$$\frac{a}{Sen\ \alpha} = \frac{c}{Sen\ \theta}$$

Lo que es igual a tener:

$$\frac{Sen\ \alpha}{a} = \frac{Sen\ \theta}{c}$$

Así mismo se puede hallar para el lado *b* y el ángulo β , donde se puede concluir que:

$$\frac{a}{Sen\alpha} = \frac{b}{Sen\beta} = \frac{c}{Sen\theta}$$

Lo que equivale a:

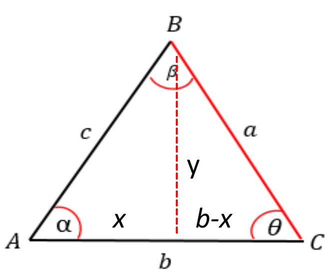
$$\frac{Sen\ \alpha}{a} = \frac{Sen\beta}{b} = \frac{Sen\ \theta}{c}$$

4.2 Ley del Coseno

En la escena interactiva “Ejercicios propuestos ley del seno” de la página 392 del libro interactivo “Matemáticas Operativas”, podrás variar los ángulos y los lados del triángulo rectángulo para que observes la distancia recorrida por un ciclista en la medida que se cambie el ángulo y los lados.

Establece la relación entre los lados que conforman al ángulo y su lado opuesto.

1. $$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos a \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\theta \end{cases}$$



Por Pitágoras,

$$c^2 = x^2 + y^2 \quad (1)$$
$$a^2 = y^2 + (b - x)^2 \quad (2)$$

Resolviendo el cuadrado de una diferencia en $(b - x)^2$ en (2) , no queda:

$$a^2 = y^2 + b^2 - 2bx + x^2$$
$$a^2 = x^2 + y^2 + b^2 - 2bx$$

De la ecuación (1), $c^2 = x^2 + y^2$ y reemplazamos

$$a^2 = x^2 + y^2 + b^2 - 2bx$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

Ahora, $Cos\ \alpha = \frac{x}{c}$

Despejando la *x*, $c \cdot Cos\ \alpha = x$ y reemplazamos la *x* en la ecuación anterior:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot Cos\ \alpha$$

Observen que:
El lado opuesto al ángulo α, es "*a*" y lo conforman los lados *b* y *c*
El lado opuesto al ángulo θ, es "*c*" y lo conforman los lados *a* y *b*
El lado opuesto al ángulo β, es "*b*" y lo conforman los lados *a* y *c*
Si queremos hallar *b*, observen que los lados que conforman el ángulo β, son *a* y *c*. Por lo tanto:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot Cos\beta$$

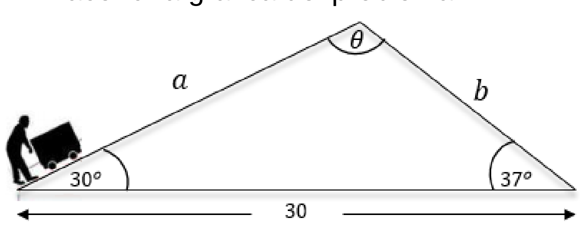
Si queremos hallar *c*, observen que los lados que conforman el ángulo θ, son *a* y *b*. Por lo tanto:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot Cos\theta$$

Ejemplo 11: Ley del Seno y del Coseno

a. Un obrero debe subir y bajar con una carretilla por una rampa que tiene una inclinación al subir de 30° y al bajar de 37°. Si se sabe que la base de la rampa mide 30 metros, Calcular el recorrido total del obrero.

   Solución:
   Hacer una gráfica del problema



Lo primero es recordar que los ángulos internos de un triángulo, suman 180°, por lo que

$$\theta = 180^{\circ} - 30^{\circ} - 37^{\circ}$$

$$\theta = 113^{\circ}$$

Sabiendo que $\theta = 113^{\circ}$, se procede aplicar la ley del Seno.

$$\frac{30}{Sen113^{\circ}} = \frac{a}{Sen37^{\circ}}$$

Despejamos a:

$$a = \frac{30Sen37^{\circ}}{Sen113^{\circ}}$$

$$a = 19.6$$

Ahora:

$$\frac{30}{Sen113^{\circ}} = \frac{b}{Sen30^{\circ}}$$

Despejamos b:

$$b = \frac{30Sen30^{\circ}}{Sen113^{\circ}}$$

$$b = 16.3$$

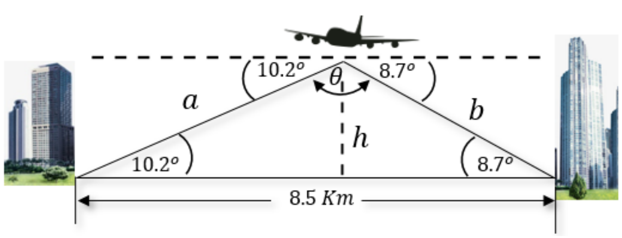
El recorrido total será:

$$Recorrido = a + b$$

$$Recorrido = 19.6 + 16.3$$
$$Recorrido = 35.9$$

b. En un momento determinado cuando un avión voló sobre un camino recto que une a dos ciudades pequeñas, los ángulos de depresión de ambas fueron de 10.2° y 8.7°.

   Determine:
   - Las distancias rectas desde el avión a cada una de las ciudades en ese momento si la separación entre ambas es de 8.45 Km.
   - La altura del avión.



$$\theta = 180^{\circ} - 10.2^{\circ} - 8.7^{\circ}$$

$$\theta = 161.1^{\circ}$$

Sabiendo que $\theta = 161.1^{\circ}$, se procede aplicar la ley del Seno.

$$\frac{8.5}{Sen161.1^{\circ}} = \frac{a}{Sen8.7^{\circ}}$$

Despejamos a:

$$a = \frac{(8.5)Sen8.7^{\circ}}{Sen161.1^{\circ}}$$

La distancia a una de las ciudades es:

$$a = 3.97$$

Ahora:

$$\frac{8.5}{Sen161.1^{\circ}} = \frac{b}{Sen10.2^{\circ}}$$

Despejamos b:

$$b = \frac{(8.5)Sen10.2^{\circ}}{Sen161.1^{\circ}}$$

La distancia a la otra ciudad es:

$$b = 4.65$$

Para hallar la altura (h) del avión, podemos utilizar las funciones trigonométricas

$$Sen8.7^{\circ} = \frac{h}{b}$$

$$Sen8.7^{\circ} = \frac{h}{4.65}$$

$$h = (4.65)Sen8.7^{\circ}$$

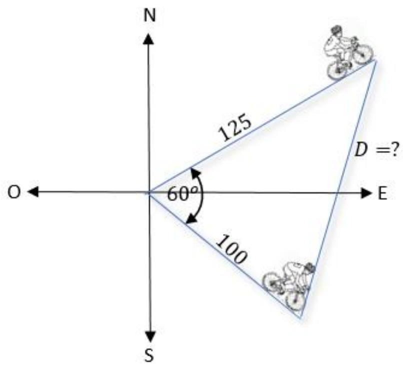
$$h = (4.65)Sen8.7^{\circ}$$

$$h = 0{,}70\ Km$$

c. Dos ciclistas parten simultáneamente de un mismo punto en distintas direcciones, con una velocidad constante.

   El ciclista A, parte en dirección noreste a una velocidad de 50 Km/h
   El ciclista B, parte en dirección sureste a una velocidad de 40Km/H
   Si se sabe el ángulo que los separa es de 60°, al cabo de 2.5 hora que distancia los separa.

Solución:



Luego de tener la gráfica de los que nos plantean en el ejercicio, es importante analizar los datos.
El ciclista “A” parte a una velocidad constante de 50 Km/h, quiere decir que en 2.5 horas a recorrido 125 Km (50 x 2.5).

El ciclista “B” parte a una velocidad constante de 40 Km/h, quiere decir que en 2.5 horas a recorrido 100 Km (40 x 2.5).
Como se solicita la distancia entre los ciclistas al cabo de 2.5, con un ángulo de separación de 60°, es necesario aplicar la ley del coseno.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot Cos\ \alpha$$

Reemplazamos los datos que se indican en la gráfica.

$$D^2 = 125^2 + 100^2 - 2(125)(100) \cdot Cos\ 60^{\circ}$$

$$D^2 = 25.625 - 25.000 \cdot \frac{1}{2}$$

Simplificamos

$$D^2 = 25.625 - 12.500$$

$$D^2 = 13.125$$

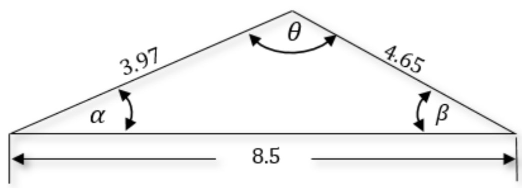
$$D = \pm\sqrt{13.125}$$

$$D = \pm 114{,}56$$

Para la respuesta sólo se toma la parte positiva

$$D = 114{,}56$$

d. Encontrar los ángulos $\alpha, \beta\ y\ \theta$ en el siguiente triángulo oblicuángulo



Dado que se tienen los lados, es necesario utilizar la ley del coseno, al menos para encontrar uno de los ángulos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot Cos\ \alpha$$

$$4.65^2 = 3.97^2 + 8.5^2 - 2(3.97)(8.5) \cdot Cos\ \alpha$$

$$21.62 = 15.76 + 72.25 - 67.49 \cdot Cos\ \alpha$$

$$21.62 = 88.01 - 67.49 \cdot Cos\ \alpha$$

Despejamos $Cos\ \alpha$

$$67.49 \cdot Cos\ \alpha = 88.01 - 21.62$$

$$67.49 \cdot Cos\ \alpha = 66.39$$

$$Cos\ \alpha = \frac{66.39}{67.49}$$

$$Cos\ \alpha = 0.9837$$

$$\alpha = Cos^{-1}\ (0.984)$$

$$\alpha = 10.26$$

Como ya se conoce el ángulo α, podemos utilizar la ley del Seno para hallar el ángulo θ.

$$\frac{Sen\ \beta}{3.97} = \frac{Sen\ \alpha}{4.65}$$

Reemplazamos α y despejamos $Sen\ \beta$

$$Sen\ \beta = \frac{(3.97)Sen\ 10.26}{4.65}$$

$$Sen\ \beta = \frac{(3.97)Sen\ 10.26}{4.65}$$

$$Sen\ \beta = 0.152$$

$$\beta = Sen^{-1}(0.152)$$

$$\beta = 8.74$$

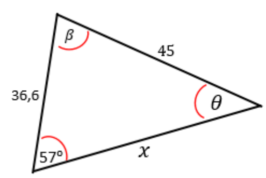
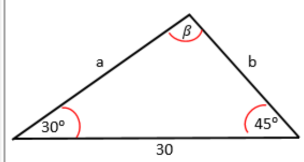
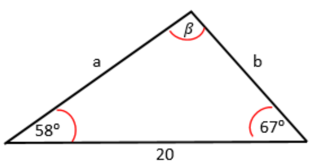
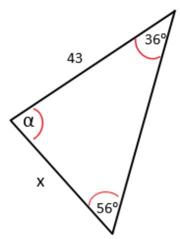
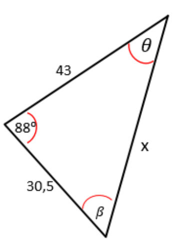
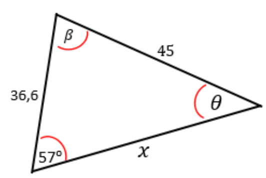
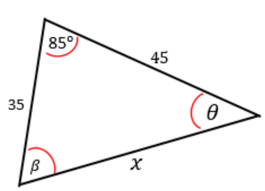
Teniendo α y β, conociendo que los ángulos internos de un triángulo suman 180°, podemos encontrar θ.

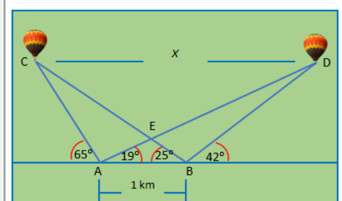
$$\theta = 180^{\circ} - 10.26^{\circ} - 8.74^{\circ}$$

$$\theta = 161^{\circ}$$

Con base en lo estudiado, con lo observado en el video “Ley de Seno y Coseno | Ejemplo 1 | Solucionar el triángulo” y guiándose con el ejemplo 11, en sus literales a, b, c, y d, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Resolver los ejercicios propuestos por el método adecuado.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1. θ, β, x 	$\theta = 43^o$ $\beta = 80^o$ $x = 52.84$	2. β, a, b, c 	$\beta = 105^o$ $a = 21.96$ $b = 15.53$
3. β, a, b 	$\beta = 55^o$ $a =$ $b =$	4. α, x 	$\alpha = 88^o$ $x = 30.47$
5. 	$x = 51.84$ $\theta = 36^o$ $\beta = 56^o$	6. θ, β, x 	$\theta = 43^o$ $\beta = 80^o$ $x = 52.84$
7. x, β 	$x = 54.55$ $\beta = 55.26$ $\theta = 39.74$	8. Calcular la distancia que debe recorre un obrero para subir y bajar una carretilla por una rampa. Si sabemos que la base mide 30 metros y tiene una inclinación de 30º en la subida y 45º en la bajada.	$Distancia = 37.49\ mts$

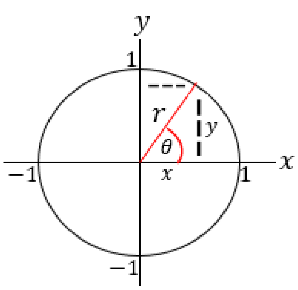
Resolver los ejercicios propuestos por el método adecuado.			
9. Dos observadores desde puntos distintos, ven dos globos, que están en el mismo plano vertical en el cual están ellos. La distancia entre los observadores es de 1 Km como lo muestra la figura. Hallar la distancia “x” entre los dos globos.	$x = 1.8975\text{ km}$	10. x 	$x = 1.8975\text{ km}$

SEMANA 14

5 IDENTIDADES ESPECIALES

Retomamos lo aprendido con el circulo unitario y el teorema de Pitágoras

$$Sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$



$$Cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

$$\text{Tan}\,\theta = \frac{Sen\theta}{Cos\theta} = \frac{y}{x}$$

La ecuación del círculo unitario es $x^2 + y^2 = 1$,

5.1 Identidades trigonométricas Pitagóricas

2. De la ecuación de circulo unitario, podemos concluir:

   $x^2 + y^2 = 1$

   $Cos^2\theta + Sen^2\theta = 1$

3. Si dividimos toda la ecuación por x^2, obtendremos:

   $\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$

   $1 + Tan^2\theta = Sec^2\theta$

4. Si dividimos toda la ecuación por y^2, obtendremos:

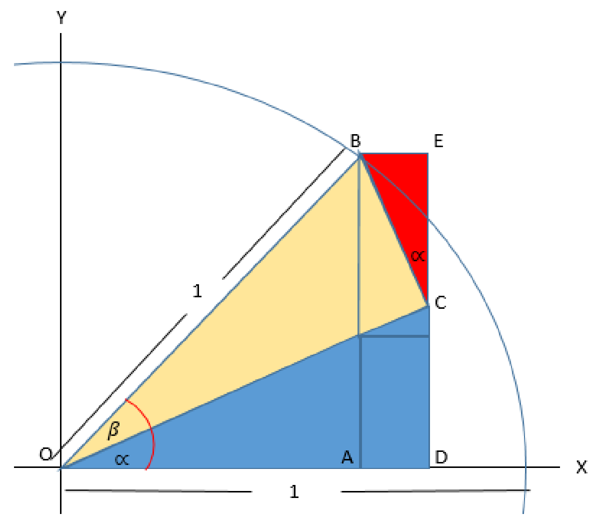
$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$Cot^2\theta + 1 = Csc^2\theta$$

5.2 Identidades trigonométricas de ángulos suma y resta

En la escena interactiva de la página 397 del libro interactivo "Matemáticas Operativas", podrás analizar el paso a paso de la demostración de las identidades trigonométricas de ángulos suma y resta.

5. $Sen\ (\alpha \pm \beta) = Sen\alpha \cdot Cos\beta \pm \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Sen}\beta$



Hallaremos las funciones trigonométricas de los triángulos $\varDelta BOC$, $\varDelta COD$, $\varDelta BCE$

Para el $\varDelta BOC$:

$$\operatorname{Sen}\beta = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{1} = BC$$

$$\operatorname{Cos}\beta = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = OC$$

Para el $\varDelta COD$:

$$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{Cos\beta}$$

Observen que: $OC = Cos\beta$, luego, $CD = Sen\alpha \cdot Cos\beta$

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{Cos\beta}$$

Luego,
$OD = \operatorname{Cos}\alpha \cdot Cos\beta$

Para el $\varDelta BCE$:

$$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{BE}{BC}$$

$\operatorname{Sen}\alpha \cdot \operatorname{Sen}\beta = BE$ y observen que $BE = AD$, por lo tanto

$$\operatorname{Sen}\alpha \cdot \operatorname{Sen}\beta = BE = AD$$

Observen que el lado BC es común para $\triangle BOC$ y el $\triangle BCE$, donde $BC = \text{Sen}\,\beta$

$BE = \text{Sen}\,\alpha \cdot \text{Sen}\,\beta$

$AD = \text{Sen}\,\alpha \cdot \text{Sen}\,\beta$

Luego,

$$\text{Sen}\,\alpha = \frac{BE}{BC} = \frac{BE}{\text{Sen}\,\beta}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{CE}{BC} = \frac{CE}{\text{Sen}\,\beta}$$

Luego,

$$\text{Cos}\,\alpha \cdot \text{Sen}\,\beta = CE$$

Tengan en cuenta que:

$$AB = CD + CE$$

Ahora si podemos encontrar las funciones trigonométricas para el $\triangle AOB$

$$Sen\,(\alpha+\beta) = \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{1}$$

Por lo tanto,

$$Sen\,(\alpha+\beta) = AB$$

Recuerden que $AB = EC + CD$, por lo tanto:

$$Sen\,(\alpha+\beta) = CD + CE$$

$$Sen\,(\alpha+\beta) = Sen\alpha \cdot Cos\beta + \text{Cos}\,\alpha \cdot \text{Sen}\,\beta$$

$$Sen\,(\alpha-\beta) = Sen\alpha \cdot Cos\beta - \text{Cos}\,\alpha \cdot \text{Sen}\,\beta$$

$$Cos\,(\alpha+\beta) = \frac{OA}{OB}$$

Observen que $OA = OD - AD$, reemplazando obtenemos y $OB = 1$

$$Cos\,(\alpha+\beta) = \frac{OD - AD}{1}$$

$Cos\ (\alpha+\beta)=\mathrm{Cos}\,\alpha\cdot Cos\beta-\mathrm{Sen}\,\alpha\ \cdot\mathrm{Sen}\,\beta$

$Cos\ (\alpha-\beta)=\mathrm{Cos}\,\alpha\cdot Cos\beta-(-\,\mathrm{Sen}\,\alpha\ \cdot\mathrm{Sen}\,\beta)$

6. $Cos\ (\alpha\pm\beta)=\mathrm{Cos}\,\alpha\cdot Cos\beta\mp\mathrm{Sen}\,\alpha\ \cdot\mathrm{Sen}\,\beta$

Ejercicio propuesto: Hallar $Tan\ (\alpha+\beta)$
Tengan en cuenta que:

$$Tan\ (\alpha+\beta)=\frac{Sen\ (\alpha+\beta)}{Cos\ (\alpha+\beta)}$$

Sugerencia: Reemplazar $Sen\ (\alpha+\beta)$ y $Cos\ (\alpha+\beta)$, luego dividir numerador y denominador por $Cos\alpha\cdot Cos\beta$

7. $$Tan\ (\alpha\pm\beta)=\frac{Tan\alpha\pm Tan\beta}{1\mp Tan\alpha Tan\beta}$$

5.3 Identidades trigonométricas de ángulos dobles

8. $Sen2\alpha=2Sen\alpha Cos\alpha$

   Para encontrar la formula de $Sen2\alpha$, en la formula $Sen\ (\alpha+\beta)=Sen\alpha\cdot Cos\beta+\mathrm{Cos}\,\alpha\cdot\mathrm{Sen}\,\beta$, haremos $\alpha=\beta$, reemplazando nos queda:

$$Sen\ (\alpha+\alpha)=Sen\alpha\cdot Cos\alpha+\mathrm{Cos}\,\alpha\cdot\mathrm{Sen}\,\alpha$$
$$Sen\ (2\alpha)=2Sen\alpha\cdot Cos\alpha$$

9. $Cos2\alpha=Cos^2\alpha-Sen^2\alpha$

   Para encontrar la formula de $Cos2\alpha$, en la fórmula $Cos\ (\alpha+\beta)=\mathrm{Cos}\,\alpha\cdot Cos\beta-\mathrm{Sen}\,\alpha\ \cdot\mathrm{Sen}\,\beta$, haremos $\alpha=\beta$, reemplazando nos queda:

$$Cos\ (\alpha+\alpha)=\mathrm{Cos}\,\alpha\cdot Cos\alpha-\mathrm{Sen}\,\alpha\ \cdot\mathrm{Sen}\,\alpha$$
$$Cos\ (2\alpha)=Cos^2\alpha-Sen^2\alpha$$

10. $Tan2\alpha=\frac{2Tan\alpha}{1-Tan^2\alpha}$

    Ejercicio propuesto: Hallar $Tan\ (\alpha+\beta)$
    Tengan en cuenta que:

$$Tan\ (2\alpha)=\frac{Sen\ (2\alpha)}{Cos\ (2\alpha)}$$

Sugerencia: Reemplazar $Sen\ (2\alpha)$ y $Cos\ (2\alpha)$, luego dividir numerador y denominador por
$Cos^2\alpha$

5.4 Identidades trigonométricas de ángulos medios

11. $Sen\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-Cos\alpha}{2}}$

En la fórmula $Cos\,(2\alpha)=Cos^2\alpha-Sen^2\alpha$, expresaremos $Cos^2\alpha$ en términos de $Sen\,\alpha$, haciendo uso de la identidad pitogórica $Sen^2\theta+Cos^2\theta=1$

$$Sen^2\alpha+Cos^2\alpha=1$$

Despejamos $Cos^2\theta$

$$Cos^2\alpha=1-Sen^2\alpha$$

Reemplazamos en

$$Cos\,(2\alpha)=Cos^2\alpha-Sen^2\alpha$$
$$Cos\,(2\alpha)=1-Sen^2\alpha-Sen^2\alpha$$
$$Cos\,(2\alpha)=1-2Sen^2\alpha$$

Depejamos $Sen\,\alpha$

$$2Sen^2\alpha=1-Cos\,(2\alpha)$$
$$Sen^2\alpha=\frac{1-Cos\,(2\alpha)}{2}$$
$$Sen\,\alpha=\sqrt{\frac{1-Cos\,(2\alpha)}{2}}$$

Hacemos $\alpha=\frac{\alpha}{2}$

$$Sen\,\alpha=\sqrt{\frac{1-Cos\,(2\alpha)}{2}}$$
$$Sen\,\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-Cos\,\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{2}}$$
$$Sen\,\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-Cos\,\alpha}{2}}$$

12. $Cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+Cos\alpha}{2}}$

Ejercicio propuesto: Encontrar $Cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+Cos\alpha}{2}}$,
Para hacaerlo, realizar el procedimiento anterior, despejando $Sen^2\alpha$ en la identidad trigonométrica $Sen^2\alpha+Cos^2\alpha=1$ y reemplazar en $Cos\,(2\alpha)=Cos^2\alpha-Sen^2\alpha$

13. $Tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-Cos\alpha}{1+Cos\alpha}}$

Ejercicio propuesto: Encontrar $Tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-Cos\alpha}{1+Cos\alpha}}$, teniendo en cuenta que

$$Tan\frac{\alpha}{2}=\frac{Sen\frac{\alpha}{2}}{Cos\frac{\alpha}{2}}$$

Ejemplo 12: Utilizando las fórmulas anteriores, resolver las siguientes identidades trigonométricas.

a.

$$\frac{1-Sen\ \alpha}{Cos\ \alpha}=\frac{Cos\alpha}{1+Sen\alpha}$$

Para solucionar identidades trigonométricas, puedes hacer lo siguiente:

- Convertir el primer término (derecha) en el segundo término (izquierda)
- Convertir el segundo término (izquierda) en el primer término (derecha)
- Convertir los dos términos a la par, hasta llegar a una igualdad.

$$\frac{1-Sen\ \alpha}{Cos\ \alpha}=\frac{Cos\alpha}{1+Sen\alpha}$$

Multiplicamos por la conjugada del numerador.

$$\frac{1-Sen\ \alpha}{Cos\ \alpha}\cdot\frac{1+Sen\ \alpha}{1+Sen\ \alpha}=\frac{Cos\alpha}{1+Sen\alpha}$$

Se multiplican numeradores y denominadores entre sí (en el numerador hay un producto notable, la suma por la diferencia).

$$\frac{(1^2-Sen^2\ \alpha)}{Cos\ \alpha(1+Sen\ \alpha)}=\frac{Cos\alpha}{1+Sen\alpha}$$

Se utiliza la identidad trigonométrica Pitagórica
$Cos^2\theta+Sen^2\theta=1$, despejamos el $Cos^2\theta$

$$Cos^2\theta=1-Sen^2\theta$$

Reemplazamos

$$\frac{Cos^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{Cos}\ \alpha(1+Sen\ \alpha)}=\frac{Cos\alpha}{1+Sen\alpha}$$

Simplificamos

$$\frac{Cos\ \alpha}{1+Sen\ \alpha}=\frac{Cos\alpha}{1+Sen\alpha}$$

b.

$$(Sen\ \alpha+Cos\alpha)^2+(Sen\ \alpha-Cos\alpha)^2=2$$

Se solucionan el cuadrado de la suma y la diferencia de los binomios.

$$Sen^2\,\alpha + 2Sen\cancel{\alpha}\cancel{C}osa + Cos^2\alpha + Sen^2\,\alpha - 2Sen\cancel{\alpha}\cancel{C}osa + Cos^2\alpha = 2$$

Sumamos términos semejantes

$$2Sen^2\,\alpha + 2Cos^2\alpha = 2$$

Sacamos factor común

$$2(Sen^2\,\alpha + Cos^2\alpha) = 2$$

Nuevamente utilizamos $Cos^2\theta + Sen^2\theta = 1$ y reemplazamos

$$2(1) = 2$$

$$2 = 2$$

c.

$$\frac{Cos\,x + Sen\,x}{Sen\,x} = 1 + \frac{1}{Tan\,x}$$

Para solucionar esta identidad, lo más convniente es separar el denominador para cada término de la suma que se tiene en el numerador.

$$\frac{Cos\,x}{Sen\,x} + \frac{\cancel{Sen}\,x}{\cancel{Sen}\,x} = 1 + \frac{1}{Tan\,x}$$

$$Cot\,x\ + 1 = 1 + \frac{1}{Tan\,x}$$

$$\frac{1}{Tan\,x}\ + 1 = 1 + \frac{1}{Tan\,x}$$

$$1 + \frac{1}{Tan\,x}\ = 1 + \frac{1}{Tan\,x}$$

Observa y analiza detenidamente el video "Demostración de identidades trigonométricas - ejercicio 3", en el cual presentan la demostración, paso a paso de una identidad trigonométrica, que te servirá de base para resolver los siguientes ejercicios propuestos. (Ríos G, 2012a)

Con base en lo estudiado, guiándose con el ejemplo 12 y una vez observado y analizado el video anterior, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Resolver las identidades trigonométricas propuestas.			
Ejercicio	**Ejercicio**	**Ejercicio**	**Ejercicio**
1. $\tan\theta \cdot \cot\theta \equiv 1$	2. $\csc\theta \cdot \cos\theta \equiv \cot\theta$	3. $\csc^2\theta - \cot^2\theta \equiv 1$	4. $\frac{\csc^2\alpha - 1}{\cot^2\alpha} \equiv 1$
5. $\frac{\tan\alpha}{\cot\alpha} \equiv \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$	6. $\frac{\sec\alpha}{\csc\alpha} \equiv \tan\alpha$	7. $sen^2\theta(1+\cot^2\theta) \equiv 1$	8. $(\sec\beta - 1)(\sec\beta + 1) \equiv \tan^2\beta$
9. $\tan\theta + \cot\theta \equiv \sec\theta \cdot \csc\theta$	10. $(\csc\theta + \cot\theta)^2 \equiv \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$	11. $\frac{1}{\sec^2\theta} \equiv sen^2\theta \cdot \cos^2\theta + \cos^4\theta$	12. $\sec^2\theta + \csc^2\theta \equiv \frac{1}{sen^2\theta \cdot \cos^2\theta}$
13. $\tan\theta + \frac{\cos\theta}{1+sen\theta} \equiv \sec\theta$	14. $\frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta} \equiv 2\cos^2\beta - 1$	15. $\frac{1+sen\alpha}{1-sen\alpha} - \frac{1-sen\alpha}{1+sen\alpha} \equiv 4\tan\alpha \cdot \sec\alpha$	16. $\sec\theta - sen\theta \cdot \tan\theta \equiv \cos\theta$
17. $sen\theta(\csc\theta - sen\theta) \equiv \cos^2\theta$	18. $(sen\theta - \cos\theta)^2 + (sen\theta + \cos\theta)^2 \equiv 2$	19. $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) \equiv 1$	20. $(1-sen^2\theta)(1+\tan^2\theta) \equiv 1$

SEMANA 15

6 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Es una ecuación que tiene expresiones trigonométricas. Si una ecuación trigonométrica no es identidad, con frecuencia hallamos soluciones mediante el uso de técnicas semejantes a las empleadas para ecuaciones algebraicas. La principal diferencia es que, de la ecuación trigonométrica primero despejamos sen *x*, cos *u*, etcétera y luego hallamos valores de *x* o *u* que satisfagan la ecuación.

Observa y analiza detenidamente el video "Ecuaciones trigonométricas - ejercicio 3 (parte 1 de 2)", en el cual presenta la solución, paso a paso una ecuación trigonométrica, que te servira de base para resolver los siguientes ejercicios propuestos. (Ríos G, 2012b)

Lo que significa que si $Sen\ 30^o = \frac{1}{2}$, en caso de tener en la solución de una ecuación $Sen\ x = \frac{1}{2}$, para encontrar el valor de *x* se debe calcular:

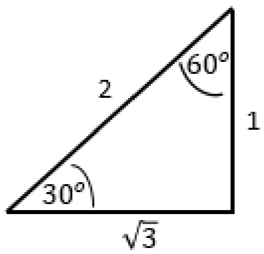
$$Sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x$$
$$x = 30^o$$

Ejemplo 13: Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a.

$$\sqrt{3}Sen\ x + Cos\ x = 1$$

El triángulo rectángulo cuyo uno de sus lados es $\sqrt{3}$, es el de 30^o.



$$Sen30^o = \frac{1}{2}$$

$$Cos30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conociendo esto, podemos dividir toda la ecuación por dos (2) y reescribir la ecuación como:

$$\frac{\sqrt{3}Sen\ x}{2} + \frac{Cos\ x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}Sen\ x + \frac{1}{2}Cos\ x = \frac{1}{2}$$

Reemplazamos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1}{2}$, por su equivalencia

$$Cos30^oSen\ x + Sen30^oCos\ x = \frac{1}{2}$$

Observen que se tiene la identidad de trigonométricas de ángulos suma y resta, literal 4.2 de la página 20

$$Sen\ (\alpha \pm \beta) = Sen\alpha \cdot Cos\beta \pm \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Sen}\beta$$

Para este caso es la suma $Sen\ (\alpha + \beta) = Sen\alpha \cdot Cos\beta + \operatorname{Cos}\alpha \cdot \operatorname{Sen}\beta$

Reemplazamos

$$Sen\ (30^o + x) = Sen30^o \cdot Cosx + \operatorname{Cos}30^o \cdot \operatorname{Sen}x = \frac{1}{2}$$

$$Sen\ (30^o + x) = \frac{1}{2}$$

Podemos hacer un cambio de variable, sea $30^o + x = a$
Reescibimos

$$Sen\ (a) = \frac{1}{2}$$

$$a = Sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$a = 30^o$$

Esto significa que el Seno es positivo en el primer (I) y tercer (II) cuadrante y el equivalente a 30^o en el segundo cuadrante es 150^o

$$\begin{cases} a = 30^o \\ a = 150^o \end{cases}$$

Reemplzamos en $30^o + x = a$ para

$$a = 30^o$$

$$30^o + x = 30^o$$

$$x = 0^o, \qquad 360^o + NV(360^o)$$

Reemplzamos en $30^o + x = a$ para

$$a = 150^o$$

$$30^o + x = 150^o$$

$$x = 150^o - 30^o$$

$$x = 120^o + NV(360^o)$$

Nota: En la respuesta se debe incluir NV=Número de vueltas o giros.

b.

$$Sen\ 2x = Sen\ x$$

Utilizamos la fórmula de ángulos dobles $Sen2\alpha = 2Sen\alpha Cos\alpha$

$$2Sen\ xCos\ x = Sen\ x$$

$$2Sen\ xCos\ x - Sen\ x = 0$$

Sacamos factor común

$$Sen\ x(2Cos\ x - 1) = 0$$

Se iguala cada factor a cero

$$Sen\ x = 0$$

$$x = Sen^{-1}(0)$$

$$\begin{cases} x = 0^o + NV(360^o) \\ x = 360^o + NV(360^o) \end{cases}$$

$$2Cos\ x - 1 = 0$$

$$Cos\ x = \frac{1}{2}$$

$$x = Cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x = 60^o + NV(360^o) \\ x = 300^o + NV(360^o) \end{cases}$$

c.

$$sen(2x + 60^o) + sen(x + 30^o) = 0$$

Observen que $2x + 60^o$, es el doble de $sen(x + 30^o)$
Se puede sacar factor común en $2x + 60^o$

$$2(x + 30^o)$$

Para mayor facilidad se hace un cambio de variable, sea $a = x + 30^o$

Se reescribe la ecuación:

$$Sen2(x + 30^o) + sen(x + 30^o) = 0$$

$$Sen2(a) + sen(a) = 0$$

Utilizamos la fórmula de ángulos dobles $Sen2\alpha = 2Sen\alpha Cos\alpha$

$$2Sen\alpha Cos\alpha + sen(a) = 0$$

Se saca factor común

$$Sen\alpha(2Cos\alpha + 1) = 0$$

Se iguala cada factor a cero

$$Sen\alpha = 0$$

$$a = Sen^{-1}(0)$$

$$\begin{cases} a = 0^o + NV(360^o) \\ a = 360^o + NV(360^o) \end{cases}$$

$$(2Cos\alpha + 1) = 0$$

$$Cos\ a = -\frac{1}{2}$$

$$a = Cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a = 120^o +\ NV(360^o)$$

Ahora se hace el cambio de variable, para cada uno de los valores de a.

$$a = x + 30^o$$

$$0^o = x + 30^o$$

$$x = -30^o$$

$$360^o = x + 30^o$$

$$x = 330^o$$

$$a = x + 30^o$$

$$120^o = x + 30^o$$

$$x = 90^o$$

SEMANA 16

Con base en lo estudiado, guiándose con el ejemplo 13, en sus literales a, b, y c, y una vez observado y analizado el video anterior, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

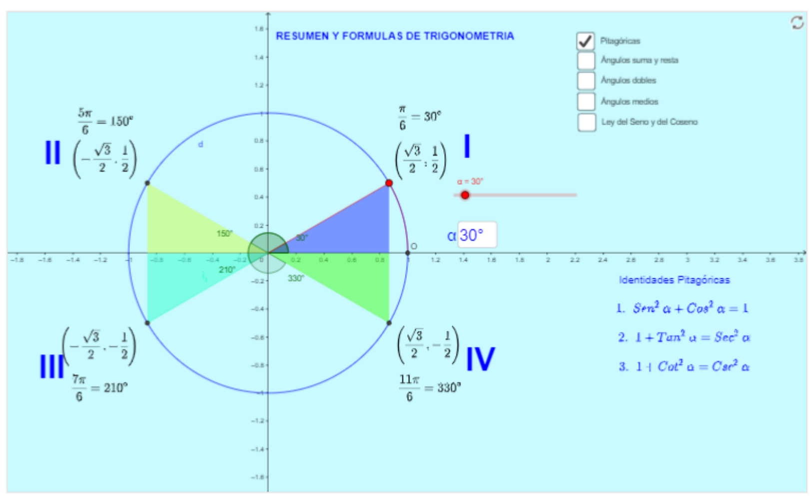
Resolver los ejercicios propuestos por el método adecuado.			
Ejercicio	**Ejercicio**	**Ejercicio**	**Ejercicio**
1. $\sqrt{3}\,tan\,x + 1 = 0$	2. $cot\,x + 1 = 0$	3. $4\,cos^2\,x - 1 = 0$	4.$(tan\,x + \sqrt{3})(cos\,x + 2) = 0$
R/. $x = \frac{5\pi}{6} + n\pi$	R/. $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$	R/. $x = \frac{\pi}{3} + n(2\pi), \frac{5\pi}{3} + n(2\pi)$	R/. $x = \frac{2\pi}{3} + n\pi$

Resolver los ejercicios propuestos por el método adecuado.			
		$x=\frac{2\pi}{3}+n(2\pi),\frac{4\pi}{3}+n(2\pi)$	
5. $2\,cos^2\,x-1=0$	6. $sec^2\,x-2=0$	7. $csc^2\,x-4=0$	8. $(2\,cos\,x+\sqrt{3})(2senx-1)=0$
R/. $x=\frac{\pi}{4}+n(2\pi),\frac{7\pi}{4}+n(2\pi)$ $x=\frac{3\pi}{4}+n(2\pi),\frac{5\pi}{4}+n(2\pi)$	R/. $x=\frac{\pi}{4}+n(2\pi),\frac{7\pi}{4}+n(2\pi)$ $x=\frac{3\pi}{4}+n(2\pi),\frac{5\pi}{4}+n(2\pi)$	R/. $x=\frac{\pi}{6}+n(2\pi),\frac{5\pi}{6}+n(2\pi)$ $x=\frac{7\pi}{6}+n(2\pi),\frac{11\pi}{6}+n(2\pi)$	R/. $x=\frac{5\pi}{6}+n(2\pi),\frac{7\pi}{6}+n(2\pi)$ $x=\frac{\pi}{6}+n(2\pi),\frac{5\pi}{6}+n(2\pi)$
9. $3\,csc^2\,x-4=0$	10. $1-tan^2\,x=0$	11. $cos\,x\,(2senx+1)=0$	12. $sec\,x\,(2\,cos\,x-\sqrt{2})=0$
R/. $x=\frac{\pi}{3}+n(2\pi),\frac{5\pi}{3}+n(2\pi)$ $x=\frac{2\pi}{3}+n(2\pi),\frac{4\pi}{3}+n(2\pi)$	R/. $x=\frac{\pi}{4}+n(\pi)$ $x=\frac{3\pi}{4}+n(\pi)$	R/. $x=\frac{\pi}{2}+n(2\pi),\frac{3\pi}{2}+n(2\pi)$ $x=\frac{7\pi}{6}+n(2\pi),x=\frac{11\pi}{6}+n(2\pi)$	R/. $x=\frac{\pi}{4}+n(2\pi)$ $x=\frac{7\pi}{4}+n(2\pi)$
13. $cos\,x\,senx-2\,cos\,x=0$	14. $tan\,x\,senx+senx=0$	15. $4\,cos^2\,x-4\,cos\,x+1=0$	16. $2sen^2x-senx-1=0$
R/. $x=\frac{\pi}{2}+n(2\pi)$	R/. $x=2\pi n$	R/.	R/. $x=\frac{\pi}{2}+n(2\pi)$

Resolver los ejercicios propuestos por el método adecuado.			
$\frac{3\pi}{2}+n(2\pi)$	$x=\pi+n(2\pi), \frac{3\pi}{4}+n(\pi)$	$x=\frac{\pi}{3}+n(2\pi), x=\frac{5\pi}{3}+n(2\pi)$	$\frac{7\pi}{6}+n(2\pi), \quad \frac{11\pi}{6}+n(2\pi)$
17. $6\cos^2 x+\cos 2x-1=0$	18. $sen^2 x+\cos 2x-1=0$	19. $sen(2x+60^o)+sen(x+30^o)=0$	20. $\tan^2 x-4\tan x+3=0$
R/. $x=\frac{\pi}{3}+n(\pi)$ $x=\frac{2\pi}{3}+n(\pi)$	R/. $x=2\pi n$ $x=\pi+n(2\pi)$	R/. $x=\frac{\pi}{6}+n(2\pi), \frac{5\pi}{6}+n(2\pi)$ $\frac{7\pi}{6}+n(2\pi), \quad \frac{11\pi}{6}+n(2\pi)$	R/. $x=71.56^\circ+n(180^\circ)$ ó $x=251.56^\circ+n(180^\circ)$

7 RESUMEN DE FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

En escena interactiva “Resumen y fórmulas de trigonometría” de la página 403 del libro interactivo “Matemáticas Operativas”, se presenta un resumen de los ángulos notables y cuadrantales, con la ayuda de la entrada ángulo "α" o utilizando el deslizador, podrás ingresar el valor para el ángulo que desees analizar, además puedes seleccionar las casillas de control, para que recuerdes las fórmulas vistas en el capítulo y que son de utilidad en la solución de identidades y ecuaciones trigonométricas.



Recuerda en un punto $P(x, y)$, las "x" corresponden a las razones trigonometricas del coseno y las "y" corresponden a las razones trigonométricas del seno.

RESUMERN DE LAS PRINCIPALES FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS	
Identidades trigonométricas Pitagóricas: **1.** $Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1$ **2.** $1 + Tan^2\theta = Sec^2\theta$ **3.** $Cot^2\theta + 1 = Csc^2\theta$ *Identidades trigonométricas de ángulos suma y resta:* **4.** $Sen\ (\alpha \pm \beta) = Sen\alpha \cdot Cos\beta \pm \text{Cos}\,\alpha \cdot \text{Sen}\,\beta$ **5.** $Cos\ (\alpha \pm \beta) = \text{Cos}\,\alpha \cdot Cos\beta \mp \text{Sen}\,\alpha \cdot \text{Sen}\,\beta$ **6.** $Tan\ (\alpha \pm \beta) = \frac{Tan\alpha \pm Tan\beta}{1 \mp Tan\alpha Tan\beta}$ *Identidades trigonométricas de ángulos dobles:* **7.** $Sen2\alpha = 2Sen\alpha Cos\alpha$ **8.** $Cos2\alpha = Cos^2\alpha - Sen^2\alpha$ **9.** $Tan2\alpha = \frac{2Tan\alpha}{1 - Tan^2\alpha}$	*Identidades trigonométricas de ángulos medios:* **10.** $Sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - Cos\alpha}{2}}$ **11.** $Cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + Cos\alpha}{2}}$ **12.** $Tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - Cos\alpha}{1 + Cos\alpha}}$ *13. Ley del seno:* $\frac{a}{Sen\alpha} = \frac{b}{Sen\beta} = \frac{c}{Sen\theta}$ *14. Ley del Coseno:* $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cosa \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\theta \end{cases}$

Para obtener el resumen completo de las principales identidades trigonométricas, puedes consultar el archivo "IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS" elaborado por la docente Gloria Rivera.

BIBLIOGRAFÍA

Abreu L, J. L. y otros. Discurso de trigonometría (2014). Recuperado de https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/trigonometria/index.html

BALDOR, A. A. (1941). *Álgebra. Cultura Centroamericana, S.A. de C.V. México D.F.* Recuperado de http://www.educando.edu.do/Userfiles/P0001/File/algebrabaldor.pdf

Martín R, J. M. (2013). *Ángulos complementarios y suplementarios*. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=J3k7Qdv3Ylg

Ortega L, A. E. (2014). *Razones trigonométricas en un ángulo rectángulo*. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=ulrqfi20Czs

Phet.colorado.edu. Tour de trigonometria (2019). Recuperado de https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_es.html

Profe, A. (2017). *Ley de Seno y Coseno | Ejemplo 1 | Solucionar el triángulo*. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=SbFetGnLdr8

Ríos G, J. A. (2012a). *Demostración de identidades trigonométricas-Ejercicio 3*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=8ESRmd-i_qs

Ríos G, J. A. (2012b). *Ecuaciones Trigonómetricas - Ejercicio 3 (Parte 1 de 2)*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=2Poj4GNWJ7k

Ríos G, J. A. (2012c). *Problema 3 de Trigonometria en triángulos rectángulos*. Cali, Colombia. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=wLICfPqRlhM

STEWART, J. (2007). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. 5ª edición, Ed. Thomson Learning*. Recuperado de https://www.academia.edu/15210886/PRECALCULO_5ta_EDICION_JAMES_STEWART_LOTHAR_REDLIN_SALEEM_WATSON

Swokowski, E., & Cole, J. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. *Cengage Learning*. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Zill G, Dennis. Dewar, J. (2012). *Algebra, trigonometría y gemetría analítica. (3ª Ed). Editorial Mc Graw Hill.*