

CAPÍTULO

2

Métodos de solución de ED de primer orden

2.4 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

- Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^r, \text{ con } r \neq 0, 1.$$

se denomina **ecuación diferencial de Bernoulli**.

Es claro que, si $r = 0$, entonces tenemos una ecuación diferencial lineal

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^0 \Rightarrow a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x).$$

También, si $r = 1$, entonces tenemos una ecuación diferencial lineal

$$\begin{aligned} a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y &\Rightarrow a_0(x)y' + a_1(x)y - f(x)y = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_0(x)y' + [a_1(x) - f(x)]y = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_0(x)y' + h(x)y = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.1 Las siguientes ecuaciones diferenciales son de Bernoulli:

1. $2y' + \frac{1}{x}y = x^2y^{-1}$; donde $r = -1$.
2. $y' - 2xy = x^3y^5$; donde $r = 5$.
3. $xy' + x^5y = xy^{\frac{1}{2}}$; donde $r = \frac{1}{2}$.
4. $5y^3 dx - y^2(-2x + y^2x^4) dy = 0$.

▼ En el caso de esta última ecuación diferencial, haciendo un poco de álgebra se puede llegar a una ecuación de Bernoulli:

$$\begin{aligned} 5y^3 dx - y^2(-2x + y^2x^4) dy &= 0 \Rightarrow 5y^3 \frac{dx}{dy} - y^2(-2x + y^2x^4) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5y^3 \frac{dx}{dy} = y^2(-2x + y^2x^4) \Rightarrow 5y^3 \frac{dx}{dy} = -2y^2x + y^4x^4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5y^3 \frac{dx}{dy} + 2y^2x = y^4x^4, \end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli para x en función de y , con $r = 4$.

□

2.4.1 Resolución de la ecuación diferencial de Bernoulli

- Una ecuación diferencial de Bernoulli:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^r, \text{ con } r \neq 0, 1,$$

se puede convertir en una ecuación diferencial lineal realizando el siguiente procedimiento:

1. Si se multiplica la ED por y^{-r} , se obtiene:

$$a_0(x)y^{-r}y' + a_1(x)y^{1-r} = f(x). \quad (2.1)$$

2. Dado que se busca una ED lineal, esto nos sugiere el cambio de variable:

$$u = y^{1-r}. \quad (2.2)$$

3. Derivando con respecto a x :

$$u' = \frac{d}{dx}y^{1-r} = (1-r)y^{-r}y' \Rightarrow \frac{1}{1-r}u' = y^{-r}y'. \quad (2.3)$$

Utilizando en (2.1) las dos condiciones anteriores (2.2) y (2.3), obtenemos:

$$\frac{a_0(x)}{1-r}u' + a_1(x)u = f(x).$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial lineal para u en función de x . (La variable dependiente en este caso es u .)

4. Esta ecuación diferencial se resuelve con el método de la sección anterior. Posteriormente se reemplaza en la solución general obtenida la variable u usando $u = y^{1-r}$; obtenemos así la solución general de la ED original.

Ejemplo 2.4.2 Resolver la ED $2y' + \frac{1}{x}y = x^2y^{-1}$.

▼ En esta ED de Bernoulli se tiene que $r = -1$. Multiplicando por $y^{-r} = y^{-(-1)} = y$:

$$y \left(2y' + \frac{1}{x}y \right) = (x^2y^{-1})y \Rightarrow 2y'y + \frac{1}{x}y^2 = x^2. \quad (2.4)$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = y^{1-r} = y^{1-(-1)} = y^2.$$

Derivando con respecto a x :

$$u' = \frac{d}{dx}y^2 = 2yy'.$$

Utilizando las dos condiciones anteriores en (2.4), obtenemos:

$$u' + \frac{1}{x}u = x^2. \quad (2.5)$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial lineal (para u en función de x) cuyo proceso de resolución se presenta a continuación:

Se tiene que $p(x) = \frac{1}{x}$. Calculando un factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu = e^{\int p(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} \Rightarrow \mu = e^{\ln x} = x.$$

Multiplicando por μ la ecuación diferencial (2.5) y aplicando la igualdad conocida:

$$x\left(u' + \frac{1}{x}u\right) = x^3 \Rightarrow (xu)' = x^3.$$

Integrando:

$$\int (xu)' dx = \int x^3 dx \Rightarrow xu + C_1 = \frac{1}{4}x^4 + C_2 \Rightarrow xu = \frac{1}{4}x^4 + C.$$

Despejando u y sustituyendo por y^2 , se obtiene:

$$u = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x}.$$

Esta última expresión es la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli. □

Ejemplo 2.4.3 Resolver la ecuación diferencial $y' - 2xy = x^3y^5$.

▼ Se tiene una ED de Bernoulli con $r = 5$. Multiplicando por $y^{-r} = y^{-5}$:

$$y^{-5}(y' - 2xy) = (x^3y^5)y^{-5} \Rightarrow y^{-5}y' - 2xy^{-4} = x^3. \quad (2.6)$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = y^{-4}.$$

Derivando con respecto a x :

$$u' = \frac{d}{dx}y^{-4} = -4y^{-5}y' \Rightarrow \frac{1}{-4}u' = y^{-5}y'.$$

Utilizando las dos condiciones anteriores en (2.6), obtenemos:

$$\frac{1}{-4}u' - 2xu = x^3.$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial lineal, la cual se resuelve a continuación.

Multiplicando por -4 , para normalizar

$$u' + 8xu = -4x^3, \quad (2.7)$$

se tiene que $p(x) = 8x$. Calculamos un factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu = e^{\int p(x) dx} \Rightarrow \mu = e^{\int 8x dx} = e^{4x^2}.$$

Multiplicamos por μ la ecuación diferencial (2.7) lineal y aplicamos la igualdad conocida:

$$e^{4x^2}(u' + 8xu) = -4x^3e^{4x^2} \Rightarrow (e^{4x^2}u)' = -4x^3e^{4x^2}.$$

Integrando:

$$\int (e^{4x^2}u)' dx = \int -4x^3e^{4x^2} dx. \quad (2.8)$$

Resolvemos la integral del lado derecho aplicando integración por partes.

$$\begin{aligned} \int -4x^3e^{4x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int x^2e^{4x^2}8x dx = \\ -\frac{1}{2}(uv - \int v du) &= -\frac{1}{2}\left(x^2e^{4x^2} - \int e^{4x^2}2x dx\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2e^{4x^2} - \frac{1}{4} \int e^{4x^2}8x dx\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2e^{4x^2} - \frac{1}{4}e^{4x^2}\right) + C_2 = \\ &= e^{4x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\right) + C_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x dx; \\ dv = e^{4x^2}8x dx &\Rightarrow v = e^{4x^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.8), obtenemos:

$$e^{4x^2}u + C_1 = e^{4x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\right) + C_2 \Rightarrow e^{4x^2}u = e^{4x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\right) + C.$$

Despejando u y sustituyendo por y^{-4} :

$$u = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\right) + Ce^{-4x^2} \Rightarrow y^{-4} = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\right) + Ce^{-4x^2},$$

que es la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli. □

Ejemplo 2.4.4 Resolver la ecuación diferencial $xy' + x^5y = x^5y^{\frac{1}{2}}$.

▼ Para esta ecuación de Bernoulli se tiene que $r = \frac{1}{2}$. Multiplicando todo por $y^{-r} = y^{-\frac{1}{2}}$:

$$y^{-\frac{1}{2}}(xy' + x^5y) = (x^5y^{\frac{1}{2}})y^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow xy'y^{-\frac{1}{2}} + x^5y^{\frac{1}{2}} = x^5. \quad (2.9)$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = y^{1-r} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}.$$

Derivando con respecto a x :

$$u' = \frac{d}{dx}y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' \Rightarrow 2u' = y^{-\frac{1}{2}}y'.$$

Utilizando las dos condiciones anteriores en (2.9), obtenemos:

$$2xu' + x^5u = x^5,$$

que es una ecuación diferencial lineal. Para hallar la solución, dividimos entre $2x$, para normalizar:

$$u' + \frac{1}{2}x^4u = \frac{1}{2}x^4. \quad (2.10)$$

Encontramos que $p(x) = \frac{1}{2}x^4$. Calculamos un factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu = e^{\int p(x) dx} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{1}{2}x^4 dx} = e^{\frac{1}{10}x^5}.$$

Multiplicando por μ la ecuación diferencial lineal (2.10) y aplicando la igualdad conocida:

$$e^{\frac{1}{10}x^5} \left(u' + \frac{1}{2}x^4 u \right) = e^{\frac{1}{10}x^5} \frac{1}{2}x^4 \Rightarrow \left(e^{\frac{1}{10}x^5} u \right)' = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{10}x^5} x^4.$$

Integrando:

$$\int \left(e^{\frac{1}{10}x^5} u \right)' dx = \frac{1}{2} \int e^{\frac{1}{10}x^5} x^4 dx. \quad (2.11)$$

Resolviendo la integral del lado derecho por sustitución:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int e^{\frac{1}{10}x^5} x^4 dx &= \\ &= \int e^{\frac{1}{10}x^5} \frac{1}{2} x^4 dx = \\ &= \int e^t dt = e^t = e^{\frac{1}{10}x^5} + C. \end{aligned}$$

$t = \frac{1}{10}x^5 \Rightarrow dt = \left(\frac{1}{2}x^4 \right) dx.$

Sustituyendo en (2.11):

$$e^{\frac{1}{10}x^5} u = e^{\frac{1}{10}x^5} + C.$$

Despejando u y sustituyendo por $y^{\frac{1}{2}}$, obtenemos:

$$u = 1 + C e^{-\frac{1}{10}x^5} \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = 1 + C e^{-\frac{1}{10}x^5},$$

que es la solución general de la ecuación diferencial dada. □

Ejemplo 2.4.5 Resolver la ecuación diferencial $5y^3 dx - y^2(-2x + y^2 x^4) dy = 0$.

▼ Como vimos anteriormente [ejemplo 2.4.1, página (1)], considerando a y como la variable independiente, podemos transformar la ecuación diferencial en

$$5y^3 \frac{dx}{dy} + 2y^2 x = y^4 x^4,$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli para x en función de y , con $r = 4$.

Multiplicamos por $x^{-r} = x^{-4}$:

$$x^{-4} \left(5y^3 \frac{dx}{dy} + 2y^2 x \right) = (y^4 x^4) x^{-4} \Rightarrow 5y^3 \frac{dx}{dy} x^{-4} + 2y^2 x^{-3} = y^4. \quad (2.12)$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = x^{1-r} = x^{1-4} = x^{-3}.$$

Derivando con respecto a y :

$$u' = \frac{d}{dy} x^{-3} = -3x^{-4} x' \Rightarrow -\frac{1}{3} u' = x^{-4} \frac{dx}{dy}.$$

Aplicando las dos últimas condiciones en (2.12), se obtiene:

$$-\frac{5}{3}y^3u' + 2y^2u = y^4.$$

que es una ecuación diferencial lineal, para u en función de y , cuya solución buscamos.

Ahora se divide entre $-\frac{5}{3}y^3$, para normalizar la ED

$$u' - \frac{6}{5}\left(\frac{1}{y}\right)u = -\frac{3}{5}y. \quad (2.13)$$

Se tiene que $p(y) = -\frac{6}{5}\left(\frac{1}{y}\right)$. Calculamos un factor integrante $\mu(y)$:

$$\mu = e^{\int p(y) dy} \Rightarrow \mu = e^{\int -\frac{6}{5}\frac{1}{y} dy} = e^{-\frac{6}{5}\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\frac{6}{5}\ln y} = y^{-\frac{6}{5}}.$$

Multiplicando por μ la ecuación diferencial lineal (2.13) y aplicando la igualdad conocida:

$$y^{-\frac{6}{5}}\left(u' - \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{y}u\right) = y^{-\frac{6}{5}}\left(-\frac{3}{5}y\right) \Rightarrow \left(y^{-\frac{6}{5}}u\right)' = -\frac{3}{5}y^{-\frac{1}{5}}.$$

Integrando:

$$\int \left(y^{-\frac{6}{5}}u\right)' dy = -\frac{3}{5} \int y^{-\frac{1}{5}} dy \Rightarrow y^{-\frac{6}{5}}u + C_1 = -\frac{3}{5}\frac{y^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C_2 \Rightarrow y^{-\frac{6}{5}}u = -\frac{3}{4}y^{\frac{4}{5}} + C.$$

Despejando u y sustituyendo por x^{-3} obtenemos:

$$u = -\frac{3}{4}y^2 + Cy^{\frac{6}{5}} \Rightarrow x^{-3} = -\frac{3}{4}y^2 + Cy^{\frac{6}{5}},$$

que es la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli. □

Ejercicios 2.4.1 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli. Soluciones en la página 7

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y' + y = xy^2$.

9. $y' + xy = xy^2$.

2. $y' - 3y = xy^{-4}$.

10. $y' - x^2y = x^2y^{-4}$

3. $x' - 3x = tx^3$.

11. $3(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy(y^3-1)$.

4. $x' + \frac{1}{5}x = x^{-3}$.

12. $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$, con $y(1) = 1$.

5. $s' + 7s = rs^7$.

13. $y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + y^{\frac{3}{2}} = 1$, con $y(0) = 4$.

6. $r' - 2r = sr^{-1}$.

14. $e^{-x}(y' - y) = y^2$.

7. $x^2y' - xy = x^{-7}y^{\frac{1}{2}}$.

15. $y^2 dx + (xy - x^3) dy = 0$.

8. $x^3y' + x^2y = x^7y^{\frac{3}{4}}$.

Ejercicios 2.4.1 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli. *Página 6*

1. $y^{-1} = x + 1 + Ce^x.$

2. $y^5 = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{15}\right) + Ce^{15x}.$

3. $x^{-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - t\right) + Ce^{-6t}.$

4. $x^4 = 5 + Ce^{-\frac{4}{5}t}.$

5. $s^{-6} = \frac{1}{7}r + \frac{1}{294} + Ce^{42r}.$

6. $r^2 = -\frac{1}{2}s - \frac{1}{8} + Ce^{4s}.$

7. $y^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{17}x^{-8} + Cx^{\frac{1}{2}}.$

8. $y^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{21}x^5 + Cx^{-\frac{1}{4}}.$

9. $y^{-1} = 1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}.$

10. $y^5 = -1 + Ce^{\frac{5}{3}x^3}.$

11. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + c(1 + x^2)}}.$

12. $y^3 = -3x^2 + cx^{\frac{3}{2}}.$

13. $y = \left(1 + 7e^{-\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{2}{3}}.$

14. $y = \frac{2}{Ce^{-x} - ex}.$

15. $x^2 = \frac{3y}{2 + Cy^3}.$